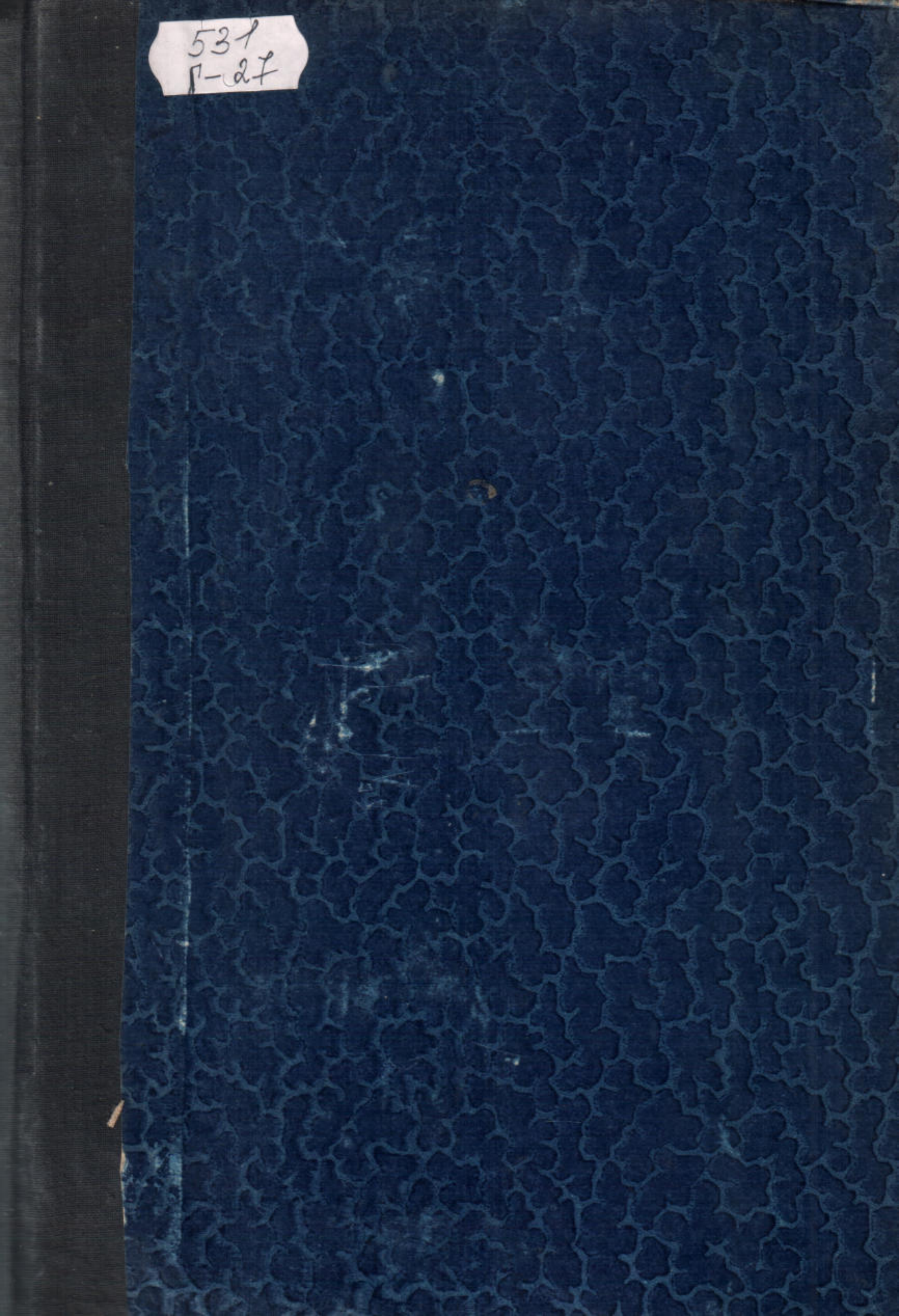
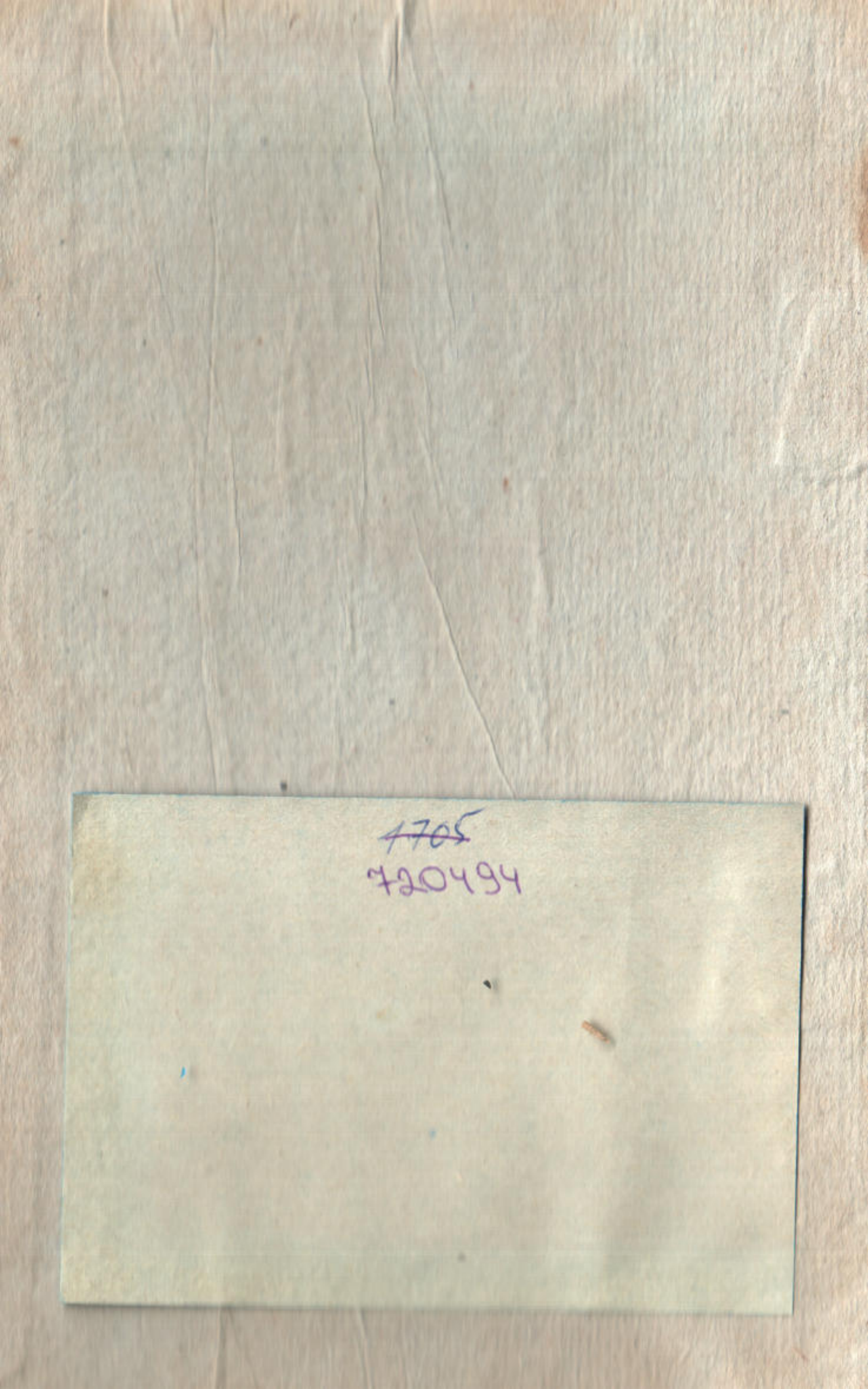

531
Г-27


1705
720494

В. Я. Гебель.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ КУРСЪ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.

Часть I.

КИНЕМАТИКА и СТАТИКА.

СЪ ПРИЛОЖЕНІЕМЪ СОБРАНІЯ ЗАДАЧЪ.

МОСКВА,
Типо-литографія „Русскаго Товарищества печатнаго и издательскаго дѣла“.
Чистые пруды, Мыльниковъ пер. соб. домъ.
1904.

ВВЕДЕНІЕ.

§ 1. **Всѣ явленія природы, т. е. всевозможныя измѣненія въ состояніи одного какого нибудь физическаго тѣла или цѣлой группы тѣлъ, сводятся къ одному общему явленію, называемому** *движеніемъ.*

Дѣйствительно, будемъ ли мы разсматривать и изучать явленія физическія, т. е. такія, при которыхъ составъ тѣлъ не измѣняется, какъ-то явленія звука, теплоты, свѣта, электричества, или явленія химическія, состоящія или въ разложеніи тѣлъ на свои составныя части, или, наоборотъ, въ образованіи новыхъ сложныхъ тѣлъ изъ нѣсколькихъ простыхъ или элементарныхъ тѣлъ, вездѣ, и въ малѣйшихъ частицахъ вещества, и въ необъятныхъ по своей величинѣ небесныхъ тѣлахъ, мы встрѣтимся съ однимъ и тѣмъ же явленіемъ движенія.

Намъ неизвѣстно ни одного тѣла въ природѣ, которое не находилось бы въ движеніи. Предметы, которые мы видимъ на землѣ и которые намъ кажутся неподвижными, въ дѣйствительности движутся съ громадной быстротой, участвуя вмѣстѣ съ землею въ ея движеніяхъ вокругъ своей оси и вокругъ солнца. Солнце, планеты и звѣзды также имѣютъ свои движенія. Однимъ словомъ, всѣ тѣла природы и всѣ мельчайшія частицы этихъ тѣлъ находятся въ постоянномъ движеніи. Если мы не видимъ нѣкоторыхъ движеній, то это происходитъ или оттого, что мы сами участвуемъ въ этихъ движеніяхъ (такъ напр., мы непосредственно не замѣчаемъ движенія земли), или отъ несовершенства нашихъ чувствъ: такъ, мы не можемъ уловить ни очень быстрыхъ движеній, напр., движенія спицъ колеса, вращающагося съ очень большой скоростью, ни очень медленныхъ, напр., роста деревьевъ.

Итакъ, совершенно неподвижныхъ тѣлъ въ природѣ не существуетъ. Однако мы можемъ легко представлять ихъ въ своемъ воображеніи. Мы говоримъ, что такія тѣла находятся *въ покоѣ*.

Вообще *движеніемъ* называется измѣненіе тѣломъ своего положенія въ пространствѣ, а *покоемъ* — сохраненіе тѣломъ одного и того же положенія.

Въ общежитіи мы говоримъ о движеніи и покоѣ тѣлъ, принимая во вниманіе ихъ положеніе *относительно* другихъ предметовъ, считаемыхъ (конечно, условно) неподвижными. Такъ напр., мы обыкновенно представляемъ землю неподвижнымъ тѣломъ, когда говоримъ о движеніи или покоѣ находящихся на ней тѣлъ.

Всякое перемѣщеніе тѣла происходитъ въ теченіе нѣкотораго (хотя иногда и очень малаго промежутка времени). Поэтому говорятъ, что движеніе происходитъ *въ пространствѣ* и *во времени*. Отсюда понятно, что характеръ движенія опредѣляется главнымъ образомъ зависимостью, существующею между пространствомъ, проходимымъ тѣломъ, и временемъ, въ которое происходитъ это перемѣщеніе. Такимъ образомъ мы различаемъ движенія быстрыя и медленныя.

§ 2. Всякая причина движенія или измѣненія движенія называется *силой*. Силы происходятъ отъ взаимнаго дѣйствія однихъ тѣлъ на другія (напр. силы удара, притяженія и проч.) или отъ взаимнаго дѣйствія однѣхъ частицъ одного и того же тѣла на другія (напр., силы сцѣпленія, упругости и проч.). Онѣ могутъ быть крайне разнообразны, однако вполнѣ возможно, не занимаясь изслѣдованіемъ природы силъ, изучать ихъ только по тѣмъ движеніямъ или измѣненіямъ движенія, которыя онѣ производятъ. Поэтому возможно считать совершенно *одинаковыми тѣ силы, которыя при одинаковыхъ условіяхъ сообщаютъ одному и тому же тѣлу одинаковыя движенія*, хотя бы природа этихъ силъ была бы и различна.

Изъ самаго опредѣленія понятія силы слѣдуетъ, что, если на какое нибудь свободное тѣло *) начнетъ дѣйствовать *одна* какая либо сила, то она или приведетъ это тѣло въ нѣкоторое движеніе, если оно было въ покоѣ, или будетъ измѣнять его движеніе, если оно уже ранѣе двигалось.

---

*) *Свободнымъ* называется такое тѣло, которое можетъ одинаково безпрепятственно двигаться по любому направленію.

Но если на это тѣло дѣйствуютъ двѣ или нѣсколько силъ, то можетъ случиться, что вслѣдствіе ихъ совокупнаго дѣйствія тѣло *не измѣнитъ своего первоначальнаго состоянія*, которое оно имѣло ранѣе, т. е. *оно или будетъ оставаться въ покоѣ, или продолжать безъ всякаго измѣненія свое движеніе.* Такое замѣчательное состояніе тѣла называется его *равновѣсіемъ*, а силы, дѣйствующія на него,—*взаимно уравновѣшивающимися*.

§ 3. **Механика** *) **есть наука о движеніи и равновѣсіи тѣлъ.** Она раздѣляется на общую или теоретическую механику и на прикладную механику.

Теоретическая механика изучаетъ общіе законы движенія и равновѣсія тѣлъ. Прикладная механика занимается изслѣдованіемъ приложенія этихъ законовъ къ машинамъ, постройкамъ и вообще къ различнымъ вопросамъ техники.

Такъ какъ всѣ явленія природы, какъ уже было сказано, сводятся къ явленію движенія, то, слѣдовательно, *общая механика представляетъ собой основную науку о природѣ.*

§ 4. Теоретическая механика разсматриваетъ: 1^0, различныя движенія и ихъ свойства; 2^0, причины движенія или силы и ихъ свойства и 3^0, зависимость между силами и движеніями.

Отсюда вытекаетъ естественное раздѣленіе этой науки на три отдѣла: *кинематику*, *статику* и *динамику*.

Кинематика **) *изучаетъ различныя виды движеній и ихъ свойства, оставляя безъ разсмотрѣнія причины этихъ движеній, т. е. силы.* Такимъ образомъ, кинематика есть чисто отвлеченная математическая наука, отличающаяся отъ геометріи только тѣмъ, что кромѣ пространства, проходимаго движущимся тѣломъ, она разсматриваетъ еще и *время*, въ которое совершается это движеніе. Поэтому ее иногда называютъ *геометріей четырехъ измѣреній.*

Статика ***) *занимается изученіемъ общихъ свойствъ силъ, а также того случая дѣйствія ихъ на тѣло, когда оно остается въ равновѣсіи.*

---

*) Отъ греческаго слова *механэ*—машина.

**) Отъ греческаго слова *кинема*—движеніе. Иногда эту часть механики называютъ также *форономіей*, т. е. наукой о движеніи.

***) Отъ греческаго слова *стасисъ*—покой, неподвижное состояніе.

Динамика *) *изслѣдуетъ свойства и законы движенія въ зависимости отъ силъ, производящихъ его.* Она занимается рѣшеніемъ двухъ основныхъ вопросовъ:

1. По данному тѣлу и дѣйствующимъ на него силамъ опредѣлить всѣ обстоятельства движенія тѣла.

2. По данному тѣлу и движенію его опредѣлить, какія силы могли произвести это движеніе.

Основаніемъ статики и динамики **) служатъ нѣсколько положеній, называемыхъ *основными законами механики*. Они были открыты великими творцами современной механики *Галилео Галилеемъ* (1564—1642) и *Исаакомъ Ньютономъ* (1642—1727) путемъ наблюденія и размышленія надъ явленіями природы.

Поэтому статика и динамика принадлежатъ къ физическимъ наукамъ.

§ 5. Какъ извѣстно, тѣла природы раздѣляются на твердыя, жидкія и газообразныя. Въ этомъ курсѣ будутъ изложены главнымъ образомъ основанія механики твердаго тѣла, причемъ мы будемъ считать такое тѣло *абсолютно-твердымъ*, т. е. такимъ тѣломъ, связь между частицами котораго, а слѣдовательно и ихъ взаимныя разстоянія, не могутъ быть измѣнены никакими силами. Для обобщенія нашихъ разсужденій и выводовъ мы будемъ предполагать, что абсолютно-твердое тѣло имѣетъ только три общихъ свойства, одинаково присущихъ всѣмъ тѣламъ природы, а именно *протяженность*, *непроницаемость* и *подвижность*. Что же касается до *вѣса* тѣла, то его будемъ разсматривать, гдѣ это будетъ нужно, не какъ общее свойство, а какъ нѣкоторую опредѣленную *силу* (тяжести), дѣйствующую на тѣло. Въ остальныхъ случаяхъ мы будемъ представлять себѣ тѣло, не имѣющимъ вѣса.

Въ механикѣ тѣло называютъ *свободнымъ*, если оно можетъ совершенно безпрепятственно перемѣщаться по какому угодно направленію, и *несвободнымъ*, если оно можетъ перемѣщаться не по всѣмъ, а только по нѣкоторымъ направленіямъ.

Если тѣло имѣетъ *одну неподвижную точку*, то остальныя точки его могутъ перемѣщаться по шаровымъ поверхностямъ,

---

*) Отъ греч. слова *дюнамисъ*—сила.

**) Иногда статику и динамику называютъ общимъ именемъ *кинетики* (отъ греч. слова *кинео*—двигаю).

описаннымъ изъ неподвижной точки, какъ изъ центра, радiусами, соотвѣтственно равными разстоянiямъ этихъ точекъ до неподвижной точки. Если тѣло имѣетъ *двѣ неподвижныя точки*, то и всѣ другiя его точки, лежащiя на прямой, соединяющей двѣ первыя точки, будутъ также неподвижны, т. е. тѣло имѣетъ *неподвижную ось;* всѣ остальныя точки могутъ описывать около этой оси, называемой *осью вращенiя*, окружности въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ этой оси.

Наконецъ, если тѣло имѣетъ *три или болѣе неподвижныя точки*, не лежащiя на одной прямой, то оно будетъ *неподвижнымъ*.

§ 6. Имѣть полное понятiе о движенiи тѣла значитъ знать движенiе каждой его точки, что представляетъ, вообще говоря, очень сложную задачу. Чтобы упростить изученiе движенiя, мы начнемъ его съ разсмотрѣнiя движенiя воображаемаго матерiальнаго тѣла безконечно-малаго объема, которое назовемъ *матерiальной точкой*. Изученiе движенiя матерiальной точки имѣетъ еще то важное значенiе, что во многихъ вопросахъ, напр., въ астрономiи, тѣла разсматриваются какъ матерiальныя точки.

Абсолютно-твердое тѣло часто называютъ *неизмѣняемой системой матерiальныхъ точекъ*.

§ 7. Итакъ, теоретическая механика, подобно тому какъ и геометрiя, разсматриваетъ явленiя движенiя и равновѣсiя не дѣйствительно существующихъ физическихъ тѣлъ, а нѣкоторыхъ воображаемыхъ тѣлъ, называемыхъ матерiальными тѣлами и точками. Это обстоятельство, кромѣ громаднаго упрощенiя, вноситъ еще и полную общность въ выводимые такимъ образомъ законы движенiя и равновѣсiя. Эти общiе законы будутъ одинаково *необходимы* и *справедливы* для *всѣхъ* тѣлъ, чѣмъ и объясняется ихъ первостепенное значенiе. Правда, они *не всегда* бываютъ *достаточны*, но эту недостаточность можно пополнить, принявъ во вниманiе тѣ особыя свойства, которыя представляютъ разсматриваемыя физическiя тѣла и условiя дѣйствiя на нихъ силъ.

Кинематика.

Основныя понятія.

§ 8. Движеніе точки при перемѣщеніи ея изъ одного положенія въ пространствѣ въ другое можетъ происходить самымъ различнымъ образомъ. Поэтому, чтобы внести порядокъ въ изученіе этого явленія, надо прежде всего установить, чѣмъ могутъ различаться другъ отъ друга движенія точки.

Движенія точки различаются, во-первыхъ, по виду той линіи которую она описываетъ въ пространствѣ, а во-вторыхъ, по той или другой зависимости между пространствомъ, проходимымъ точкой, и временемъ, въ которое совершается этотъ путь.

§ 9. Прямая или кривая линія, описываемая движущейся точкой, называется ея **траекторіей** *).

По виду траекторій, движенія дѣлятся на *прямолинейныя* (напр., таковы движенія точекъ свободно падающаго тѣла) и *криволинейныя*. Криволинейныя движенія могутъ быть самаго различнаго рода: *круговыя* (движеніе въ одной плоскости вокругъ неподвижнаго центра точекъ тѣла, подвѣшеннаго на нити), *эллиптическія* (движеніе земли и другихъ планетъ около солнца), *параболическія* (истеченіе частицъ жидкости изъ отверстія въ боковой стѣнкѣ сосуда) и т. д.

§ 10. По зависимости между проходимымъ пространствомъ и временемъ, движенія раздѣляются на *равномѣрныя* и *перемѣнныя*.

За основную единицу времени принимаются сутки = 24 часамъ = 24.60 минутамъ = 24.60^2 секундамъ, т. е. время, въ ко-

---

*) Отъ латинскаго глагола *трайицере*—бросать. Траекторіи, описываемыя небесными тѣлами, называются орбитами (отъ латинск. слова *орбисъ*—кругъ).

торое земля совершаетъ одинъ полный оборотъ вокругъ своей оси. Наиболѣе употребительная въ механикѣ единица времени есть секунда (1″). Нѣкоторая величина или продолжительность времени называется *промежуткомъ времени.* Весьма малый промежутокъ времени называется *элементомъ времени.* Граница, отдѣляющая одинъ промежутокъ времени отъ другого, называется *моментомъ времени* *).

Пространство, проходимое движущеюся точкой, измѣряется извѣстными единицами длины. Въ механикѣ наиболѣе употребительны метрическія мѣры, въ особенности *метръ* = 1,4 арш. = 3,28 фута и *сантиметръ* = 0,01 метра = 0,4 дюйма.

§ 11. Какъ уже было ранѣе сказано, во многихъ вопросахъ движенія тѣла разсматриваютъ, какъ движеніе одной точки. Это обыкновенно дѣлается въ тѣхъ случаяхъ, когда длина траекторіи весьма значительно превышаетъ размѣры тѣла.

Во всѣхъ этихъ случаяхъ о движеніи тѣла говорятъ точно такъ же, какъ о движеніяхъ точки. Но когда изучаютъ движеніе тѣла, какъ *цѣлой неизмѣняемой системы матеріальныхъ точекъ,* тогда приходится различать еще два главныхъ рода движенія тѣла: *поступательное и вращательное.*

Поступательнымъ движеніемъ тѣла называется такое движеніе, когда всѣ точки его описываютъ въ одно и то же время равныя и параллельныя траекторіи. Эти траекторіи могутъ быть какъ прямолинейными, такъ и криволинейными. Всякое прямолинейное движеніе тѣла, не сопровождаемое его вращеніемъ, представляетъ поступательное движеніе. Таковы, напр., движенія поршня въ цилиндрѣ паровой машины, тѣла, падающаго по вертикали тяжелымъ концомъ внизъ и проч. Гораздо рѣже встрѣчаются криволинейныя поступательныя движенія.

Если вообразимъ, что какое нибудь тѣло, напр., пирамида, поставленная вершиной на плоскость, движется не дѣлая *поворота около своей высоты* такъ, что вершина ея описываетъ какую нибудь кривую линію на этой плоскости, то и всѣ другія

*) Очевидно, что моментъ времени имѣетъ такое же значеніе относительно промежутка времени, какое въ геометріи точка имѣетъ относительно линіи. Подобно тому, какъ длина прямой измѣряется разстояніемъ между ея начальной и конечной точкой, и величина промежутка времени измѣряется разстояніемъ между начальнымъ и конечнымъ моментомъ этого промежутка.

точки этой пирамиды будутъ описывать въ пространствѣ точно такія же кривыя, при томъ параллельныя первой кривой. Слѣдовательно наше тѣло имѣетъ *криволинейное поступательное движеніе*. Въ поступательномъ движеніи всякая прямая, соединяющая двѣ какія либо точки тѣла, перемѣщается параллельно самой себѣ.

Очевидно, что всѣ обстоятельства поступательнаго движенія для каждой точки въ отдѣльности или для всѣхъ ихъ вмѣстѣ, т. е. для всего тѣла, *всегда совершенно одинаковы*, а потому при изученіи этого движенія можно говорить безразлично о движеніи одной точки тѣла или о движеніи всего тѣла. Всѣ выводы, къ которымъ мы при этомъ придемъ, будутъ справедливы, какъ для одной точки, такъ и для всего тѣла.

Вращательнымъ движеніемъ тѣла называется такое движеніе, когда точки его описываютъ параллельныя, но не равныя окружности или дуги вокругъ неподвижной оси въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ этой оси.

Тѣло можетъ одновременно имѣть и оба движенія: поступательное и вращательное. Тогда движеніе его называется *сложнымъ* или *составнымъ*. Сюда относятся, напр., движеніе колесъ экипажа, движеніе гайки по винту и т. д.

Изученіе движеній мы начнемъ съ прямолинейныхъ движеній точки (или тѣла, принимаемаго за точку).

Прямолинейныя движенія.

Равномѣрное движеніе.

§ 12. *Если точка въ равные промежутки времени (какой бы величины эти промежутки ни были) проходитъ равныя пространства, то такое движеніе называется равномѣрнымъ.*

Напр., если точка въ каждыя 2 секунды проходитъ по 10 метровъ, въ каждую секунду по 5 метровъ, въ каждыя полсекунды по 2,5 метра и т. д., то такое движеніе есть равномѣрное.

Каждое движеніе характеризуется своею *скоростью*, т. е. той или другой быстротой или медленностью перемѣщенія. *Въ равномѣрномъ движеніи скорость измѣряется пространствомъ, проходимымъ тѣломъ въ единицу времени* (чаще всего въ секунду). Такимъ образомъ въ каждомъ равномѣрномъ движеніи скорость его есть величина *постоянная*. Напр., въ только что приведенномъ примѣрѣ скорость точки равна 5 метрамъ въ 1 секунду.

§ 13. Условимся обозначать время движенія (напр., въ секундахъ) черезъ t, скорость (въ единицахъ длины) черезъ v, пройденное пространство черезъ s.

Такъ какъ въ каждую секунду тѣло проходитъ v единицъ длины, то, очевидно, что въ t секундъ оно пройдетъ vt единицъ длины. Итакъ

$$s = vt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Это уравненіе называется уравненіемъ равномѣрнаго движенія и читается обыкновенно такъ: *въ равномѣрномъ движеніи пространство равно скорости, умноженной на время.*

Изъ уравненія (1) имѣемъ, что

$$t = \frac{s}{v} \quad (2) \quad \text{и} \quad v = \frac{s}{t} \quad (3)$$

Уравненіе (3) показываетъ, что *въ равномѣрномъ движеніи скорость равна отношенію пройденнаго пространства ко времени.*

Итакъ, помощью уравненія (1) мы всегда можемъ найти одну изъ трехъ величинъ s, v и t, если двѣ другія извѣстны.

Примѣры: 1. Какое пространство пройдетъ равномѣрно движущаяся точка въ 1,5 минуты, если скорость ея = 5 метрамъ въ 1 секунду?

Отвѣтъ. $s = 5 \,.\, 1{,}5 \,.\, 60 = 450$ метровъ.

2. Опредѣлить скорость паровоза, если онъ, двигаясь равномѣрно, въ 35 секундъ, прошелъ 630 метровъ.

Отвѣтъ. $v = \frac{630}{35} = 18$ метровъ въ секунду.

Легко замѣтить, что пространства s и s', проходимыя равномѣрно-движущейся точкой (или тѣломъ) въ различные промежутки времени t и t', пропорціональны временамъ.

Дѣйствительно, изъ уравненія $s = vt$ и $s' = vt'$, получаемъ $s : s' = vt : vt'$ или $s : s' = t : t'$.

Перемѣнныя движенія.

§ 14. *Если точка въ равные промежутки времени проходитъ неравныя пространства, то такое движеніе называется перемѣннымъ* или *неравномѣрнымъ.*

Различныхъ перемѣнныхъ движеній существуетъ безчисленное множество. Нѣкоторыя изъ нихъ отличаются извѣстнаго рода правильностью (напр., движеніе брошенныхъ или падающихъ тѣлъ, качаніе маятника и проч.), другія могутъ быть совершенно произвольны (напр., движенія живыхъ существъ).

Если точка въ каждый слѣдующій промежутокъ времени проходитъ бóльшій путь, чѣмъ въ равный ему предыдущій промежутокъ, то такое движеніе называется *ускореннымъ*, а если меньшій путь, то *замедленнымъ.*

§ 15. Очевидно, что въ перемѣнномъ движеніи уже нельзя называть скоростью точки или тѣла пространство, проходимое ими въ единицу времени, такъ какъ пространство это постоянно из-

мѣняется. Иначе говоря, *скорость въ перемѣнномъ движеніи есть величина перемѣнная*, а потому, чтобы составить понятіе о какомъ либо перемѣнномъ движеніи, необходимо еще знать, *какъ измѣняется его скорость.*

Измѣненіе скорости въ единицу времени называется ускореніемъ. Въ ускоренномъ движеніи скорость точки или тѣла увеличивается и, слѣдовательно, ускореніе есть *положительная* величина; наоборотъ, ускореніе въ замедленномъ движеніи есть *отрицательная* величина, такъ какъ скорость здѣсь уменьшается. Въ прямолинейномъ равномѣрномъ движеніи ускореніе, очевидно, равно нулю, т. е. ускоренія не существуетъ, такъ какъ скорость равномѣрнаго прямолинейнаго движенія есть величина постоянная или неизмѣняющаяся.

§ 16. Такимъ образомъ, говорить о скорости перемѣннаго движенія въ томъ же смыслѣ, въ какомъ говорятъ о скорости въ равномѣрномъ движеніи, нельзя. Но тѣмъ не менѣе, дѣлая нѣкоторое предположеніе, можно говорить о скорости перемѣннаго движенія въ тотъ или другой моментъ времени (напр., въ началѣ или въ концѣ 1-ой, 2-ой, 10-ой или вообще t-ой секунды и т. п.), а также о скорости перемѣннаго движенія въ той или другой точкѣ его пути, что, впрочемъ, одно и то же, такъ какъ каждому моменту времени соотвѣтствуетъ одна опредѣленная точка пути и наоборотъ.

Скоростью перемѣннаго движенія въ данный моментъ времени называютъ то пространство, которое прошло бы тѣло въ единицу времени (секунду), слѣдующую за этимъ моментомъ, если бы съ этого момента оно начало двигаться равномѣрно.

Примѣръ. Скорость перемѣнно движущагося тѣла въ концѣ 4-ой секунды есть пространство, которое прошло бы тѣло въ теченіе 5-ой секунды, если бы въ моментъ, отдѣляющій конецъ 4-ой секунды отъ начала 5-ой секунды, оно стало двигаться равномѣрно.

§ 17. Въ общежитіи однако мы часто говоримъ о скорости перемѣнныхъ движеній вообще, напр., о скорости пѣшехода, лошади, желѣзнодорожнаго поѣзда и т. д. Въ этихъ случаяхъ подъ скоростью даннаго перемѣннаго движенія мы подразумѣваемъ *среднюю скорость его*, т. е. *скорость такого равномѣрнаго движенія, двигаясь съ которою тѣло въ тотъ же промежутокъ вре-*

мени прошло бы точно такое же пространство, какъ и въ данномъ перемѣнномъ движеніи.

Такимъ образомъ, если, напр., извѣстно, что какой нибудь пѣшеходъ прошелъ 300 саженъ въ 10 минутъ, то мы говоримъ, что скорость его за это время была 30 саж. въ 1 минуту или $^1/_2$ сажени въ 1 секунду. Но, говоря это, мы не можемъ, конечно, утверждать, что пѣшеходъ дѣйствительно проходилъ $^1/_2$ сажени въ каждую секунду, такъ какъ понятно, что онъ то ускорялъ, то замедлялъ свои шаги, и поэтому движеніе его было не равномѣрное, а перемѣнное. Слѣдовательно, это перемѣнное движеніе мы мысленно приравниваемъ къ такому равномѣрному движенію, въ которомъ пѣшеходъ также въ 10 минутъ прошелъ бы 300 саженъ. Скорость, равная $^1/_2$ сажени въ 1 секунду, есть скорость этого воображаемаго равномѣрнаго движенія или, что все равно, *средняя скорость* даннаго перемѣннаго движенія въ промежутокъ 10 минутъ.

Примѣры среднихъ скоростей въ секунду.

	метры.
Пѣшехода	1,5
Лошади шагомъ	1
„ рысью	2,1
„ галопомъ	4,5
Скаковой лошади	15
Товарнаго поѣзда	8—12
Пассажирскаго „	12—16
Скораго „	16—25
Парохода	4—8
Ружейной пули	480
Звука въ воздухѣ (при 0°C)	332
Свѣта	300 тыс. километр.

§ 18. Если извѣстно пространство s, пройденное перемѣнно движущимся тѣломъ въ t секундъ, то для опредѣленія средней скорости движенія за этотъ промежутокъ времени, достаточно раздѣлить величину пройденнаго пространства на число секундъ

этого промежутка времени. Поэтому, называя среднюю скорость черезъ v_c, получимъ, что

$$v_c = \frac{s}{t}.$$

Наоборотъ, если бы мы знали среднюю скорость v_c перемѣннаго движенія за нѣкоторый промежутокъ времени t, то опредѣлили бы пространство, пройденное при этомъ тѣломъ по уравненію $s = v_c . t$, т. е. точно такъ же, какъ и въ равномѣрномъ движеніи.

Очевидно, что средняя скорость перемѣннаго движенія тѣла за промежутокъ времени t есть средняя ариѳметическая всѣхъ скоростей, которыя имѣло тѣло въ теченіе этого промежутка.

§ 19. Изъ перемѣнныхъ движеній мы наиболѣе подробно разсмотримъ движенія *равномѣрно-перемѣнныя*, т. е. такія, въ которыхъ скорость въ каждую слѣдующую единицу времени (секунду) постоянно увеличивается или постоянно уменьшается на одну и ту же величину. Иначе говоря, *въ равномѣрно-перемѣнномъ движеніи ускореніе есть постоянная величина измѣненія скорости въ единицу времени.* Эта величина можетъ быть *положительной* или *отрицательной.*

Въ первомъ случаѣ движеніе называютъ *равномѣрно-ускореннымъ*, во второмъ—*равномѣрно-замедленнымъ*.

Равномѣрно-ускоренное движеніе.

§ 20. **Равномѣрно-ускореннымъ** *называется такое движеніе, въ которомъ скорость въ каждую слѣдующую единицу времени (секунду) увеличивается на одну и ту же величину.* Такимъ образомъ, ускореніе въ этомъ движеніи есть постоянная положительная величина.

Примѣръ. Всякое тѣло, свободно падающее въ безвоздушномъ пространствѣ, движется равномѣрно-ускоренно, такъ какъ въ каждую слѣдующую секунду скорость его увеличивается на 9,8 метра или на 32,2 фута.

Примѣчаніе. Увеличеніе скорости свободно падающихъ тѣлъ называется *ускореніемъ тяжести* или *ускореніемъ земного притяженія* и обозначается буквой g. Строго говоря, по причинамъ,

которыя впослѣдствіи будутъ изложены, величина g неодинакова для всѣхъ точекъ земной поверхности. Такъ, на экваторѣ она $=9,78$ м., на широтѣ 45^0 она $=9,8$ м., а на полюсѣ 9,83 м. Впрочемъ эти небольшія разницы не имѣютъ существеннаго значенія для большинства практическихъ вопросовъ. Для упрощенія вычисленій въ русскихъ мѣрахъ часто принимаютъ $g=32$ футамъ.

§ 21. **Уравненіе скорости**. Положимъ, что мы наблюдаемъ въ теченіе t секундъ движеніе какого нибудь тѣла, двигающагося равномѣрно-ускоренно, съ ускореніемъ a. Пусть въ начальный моментъ наблюденія, т. е. въ началѣ первой секунды, тѣло уже имѣло нѣкоторую скорость v_0, которую мы будемъ называть *начальной скоростью*. Тогда

Въ началѣ		1-ой	секунды	скорость	тѣла	$=v_0$
Въ концѣ		1-ой	„	„	„	$=v_0+a$
„	„	2-ой	„	„	„	$=v_0+2a$
„	„	3-ьей	„	„	„	$=v_0+3a$
„	„	t-ой	„	„	„	$=v_0+at$

Итакъ, назвавъ скорость въ концѣ t-ой секунды черезъ v (*конечная* скорость), получимъ слѣдующую зависимость между временемъ и скоростью въ концѣ этого времени

$$v=v_0+at \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Эта зависимость называется *уравненіемъ скорости* въ равномѣрно-ускоренномъ движеніи.

§ 22. **Уравненіе пространства.** Чтобы найти пространство, пройденное тѣломъ въ промежутокъ времени t, надо опредѣлить, какъ это уже было ранѣе объяснено, среднюю скорость движенія за этотъ промежутокъ времени и затѣмъ умножить ее на величину промежутка (т. е. на число секундъ t). Самая трудная часть задачи заключается въ опредѣленіи средней скорости. Въ равномѣрно-ускоренномъ движеніи средняя скорость находится очень просто: такъ какъ скорости въ каждую секунду увеличиваются на одну и ту же величину, то послѣдовательный рядъ ихъ представляетъ *ариѳметическую прогрессію*: v_0, v_0+a, v_0+2a, v_0+3a....

(Напр., тѣло, брошенное вертикально внизъ въ безвоздушномъ пространствѣ съ начальной скоростью въ 0,2 метра, будетъ имѣть скорости въ концѣ 1-ой, 2-ой, 3-ей, 4-ой секунды: 10 м.; 19,8 м.; 29,6 м.; 39,4 м. и т. д.).

Но извѣстно, что средняя ариѳметическая изъ чиселъ, составляющихъ ариѳметическую прогрессію, равна средней ариѳметической изъ перваго и послѣдняго числа. Поэтому для нахожденія средней скорости v_c равно-ускореннаго движенія достаточно сложить начальную (v_0) и конечную (v) скорости и сумму ихъ раздѣлить пополамъ, т. е. $v_c = \frac{v_0 + v}{2}$.

(Напр., средняя скорость въ нашемъ примѣрѣ $v_c = \frac{0{,}2 + 39{,}4}{2} = 19{,}8$ м.).

Если начальная скорость въ нашемъ примѣрѣ v_0, а конечная $v = v_0 + at$, то средняя скорость равно-ускореннаго движенія

$$v_c = \frac{v_0 + v_0 + at}{2} = \frac{2v_0 + at}{2} = v_0 + \frac{at}{2}.$$

Умноживъ это выраженіе на время, найдемъ пройденное тѣломъ пространство $s = \left(v_0 + \frac{at}{2}\right)t$ или

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Если величина v конечной скорости была дана, то

$$s = \frac{(v_0 + v)\, t}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Опредѣливъ изъ уравненія $v = v_0 + at$ величину $t = \frac{v - v_0}{a}$ и подставивъ ее въ уравненіе (3), найдемъ еще выраженіе величины пройденнаго пути: $s = \frac{(v_0 + v)(v - v_0)}{2a}$ или

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Уравненія (2), (3) и (4) называются *уравненіями пространства* въ равномѣрно-ускоренномъ движеніи.

§ 23. Если тѣло начало двигаться *безъ начальной скорости*, т. е., если $v_0 = 0$, то изъ уравненій, (1), (2), (3), (4), получимъ для этого частнаго случая:

Уравненіе скорости: $v = at$ . . . . (1′)

Уравненія пространства:

$$s = \frac{at^2}{2} \ (2'), \text{ или } s = \frac{vt}{2} \ (3') \text{ или } s = \frac{v^2}{2a} \ (4').$$

Очевидно, что уравненія (1′), (2′), (3′) и (4′) можно получить и непосредственно, принявъ начальную скорость $= 0$ и повторивъ всѣ предыдущія разсужденія.

Равномѣрно-замедленное движеніе.

§ 24. **Равномѣрно-замедленное движеніе** *есть такое, въ которомъ скорость въ каждую слѣдующую единицу времени (секунду) уменьшается на одну и ту же величину*. Поэтому ускореніе этого движенія есть постоянная отрицательная величина (иногда ее называютъ *замедленіемъ*). Мы будемъ ее обозначать черезъ $-a$.

Примѣръ. Всякое тѣло, брошенное вертикально вверхъ въ безвоздушномъ пространствѣ, движется равномѣрно-замедленно: въ каждую слѣдующую секунду скорость его уменьшается на величину $g = 9{,}8$ метра. Если, напр., скорость его въ началѣ 1-й секунды была 60 метровъ, то скорость его въ концѣ 1-й, 2-й, 3-й, 4-й секунды будетъ: 50,2 м.; 40,4 м.; 30,6 м.; 20,8 м. и т. д.

§ 25. **Уравненія скорости и пространства.** Уравненія скорости и пространства въ равномѣрно-замедленномъ движеніи выводятся совершенно такъ же, какъ въ равномѣрно-ускоренномъ движеніи. Называя начальную скорость тѣла черезъ v_0, получимъ, что скорость его:

Въ	началѣ	1-ой	секунды	$= v_0$.
Въ	концѣ	1-ой	„	$= v_0 - a$.
„	„	2-ой	„	$= v_0 - 2a$.
„	„	3-ей	„	$= v_0 - 3a$.
„	„	t-ой	„	$= v_0 - at$.

Итакъ, уравненіе скорости въ равномѣрно замедленномъ движеніи есть:

$$v = v_0 - at \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

Такъ какъ рядъ послѣдовательныхъ скоростей въ равномѣрно-замедленномъ движеніи также представляетъ ариѳметическую прогрессію, то средняя скорость этого движенія за нѣкоторый промежутокъ времени равна полусуммѣ начальной и конечной скорости за этотъ же промежутокъ времени, т. е.

$$v_c = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{v_0 + v_0 - at}{2} = \frac{2v_0 - at}{2} = v_0 - \frac{at}{2}.$$

Отсюда пройденное пространство $s = \left(v_0 - \frac{at}{2}\right) t$ или

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Формулы (1) и (2) можно получить изъ соотвѣтствующихъ формулъ равно-ускореннаго движенія, если вмѣсто $+ a$ подставить $- a$.

Если величина v конечной скорости извѣстна, то

$$s = \frac{(v_0 + v) t}{2} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3).$$

Наконецъ, опредѣливъ изъ уравненія (1) величину $t = \frac{v_0 - v}{a}$ и подставивъ ее въ ур-іе (3), получимъ $s = \frac{(v_0 + v)\ (v_0 - v)}{2a}$

$$\text{или } s = \frac{v_0{}^2 - v^2}{2a} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4).$$

Примѣчаніе. Полезно замѣтить, что формулы пройденнаго пространства въ равноускоренномъ и равнозамедленномъ движеніяхъ съ начальной скоростью v_0 представляютъ не что иное, какъ сумму или разность пространствъ, проходимыхъ тѣломъ въ равномѣрномъ движеніи со скоростью v_0 и въ равноускоренномъ движеніи безъ начальной скорости.

Дѣйствительно, если

$$s_1 = v_0 t \text{ и } s_2 = \frac{at^2}{2}, \text{ то } s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2} = s_1 \pm s_2.$$

Свободное паденіе и вертикальное восхожденіе тѣлъ.

§ 26. Въ случаѣ тѣлъ свободно падающихъ или брошенныхъ вертикально вверхъ съ начальной скоростью v_0, ускореніе $a = g$ и уравненія движенія принимаютъ слѣдующій видъ

Свободное паденіе.

$$v = v_0 + gt \quad . \; . \; . \; (1)$$

$$s = v_0 t + \frac{gt^2}{2} \quad . \; . \; . \; (2)$$

$$s = \frac{(v_0 + v) t}{2} \quad . \; . \; (3)$$

$$s = \frac{v^2 - v_0{}^2}{2g} \quad . \; . \; . \; (4)$$

Вертикальное восхожденіе.

$$v = v_0 - gt \quad . \; . \; . \; (1')$$

$$s = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad . \; . \; . \; (2')$$

$$s = \frac{(v_0 + v) t}{2} \quad . \; . \; (3')$$

$$s = \frac{v_0{}^2 - v^2}{2g} \quad . \; . \; . \; (4')$$

При свободномъ паденіи безъ начальной скорости ($v_0 = 0$) соотвѣтствующія формулы будутъ

$$v = gt \; (1''); \; s = \frac{gt^2}{2} \; (2''); \; s = \frac{vt}{2} \; (3''); \; s = \frac{v^2}{2g} \; (4'').$$

§ 27. Законы свободнаго паденія тѣлъ въ безвоздушномъ пространствѣ были открыты великимъ итальянскимъ ученымъ Галилео Галилеемъ (1564—1642), справедливо считающимся основателемъ современной механики. Они легко выводятся изъ двухъ основныхъ уравненій $v = gt$ и $s = \frac{gt^2}{2}$.

Замѣтимъ прежде всего, что такъ какъ въ формулы § 26 не входятъ выраженія объема и вѣса, то отсюда прямо слѣдуетъ, что въ безвоздушномъ пространствѣ *всѣ тѣла*, большія и малыя, легкія и тяжелыя, *падаютъ одинаково*, т. е. въ одинаковые промежутки времени, начиная съ начала паденія, проходятъ равныя пространства и въ одни и тѣ же моменты времени имѣютъ одну и ту же скорость.

Галилей, открывъ этотъ основной законъ, подтвердилъ его опытомъ, заставляя падать съ высоты наклонной башни въ 200 футовъ въ городѣ Пизѣ различные предметы, между прочимъ стофунтовую бомбу и полуфунтовое ядро. Бомба и ядро достигали

земли почти въ одно и то же время: ядро отставало отъ бомбы менѣе чѣмъ на половину ширины ладони. Эту небольшую разницу Галилей объяснялъ вліяніемъ сопротивленія воздуха, разсѣкаемаго падающими тѣлами.

§ 28. Это предположеніе блистательно оправдалось слѣдующимъ опытомъ Ньютона. Взята была стеклянная трубка длиною, около сажени, съ одного конца наглухо закрытая, а съ другого снабженная оправой, которая оканчивавалась гайкой съ краномъ. Посредствомъ этой гайки трубка привинчивалась къ воздушному насосу. Помѣстивъ въ трубку различные мелкіе предметы: клочки бумаги, перышки, кусочки дерева и проч., выкачивали изъ нея воздухъ. Закрывъ затѣмъ кранъ, быстро перевертывали трубку. Оказалось, что всѣ заключенные въ ней предметы падали на дно *съ совершенно одинаковой скоростью.* Впуская немного воздуха замѣчали, что легкія тѣла нѣсколько запаздывали въ своемъ паденіи. Наконецъ, совершенно открывъ кранъ и впустивъ весь воздухъ, увидѣли, что паденіе тѣлъ въ трубкѣ происходитъ совершенно такъ же, какъ и въ открытомъ воздухѣ.

Этимъ знаменитымъ опытомъ было вполнѣ опровергнуто старинное заблужденіе, высказанное за 300 слишкомъ лѣтъ до Рождества Христова греческимъ философомъ Аристотелемъ и державшееся въ силѣ почти 2000 лѣтъ среди большинства ученыхъ, а именно, что скорость паденія каждаго тѣла пропорціональна его вѣсу*).

§ 29. Изъ уравненія $s = \frac{gt^2}{2}$, при $t = 1$, находимъ

$$s = \frac{g}{2} \text{ или } g = 2s,$$

т. е. *ускореніе свободно падающаго тѣла равно удвоенному пространству, проходимому тѣломъ въ теченіе первой секунды.* Измѣряя тщательно это пространство, Галилей нашелъ, что па-

*) Еще ранѣе Галилей опровергалъ ученіе Аристотеля, остроумно указывая на заключающееся въ немъ внутреннее противорѣчіе: если тяжелое тѣло падаетъ быстрѣе легкаго, то какъ должны падать два тѣла, легкое и тяжелое, связанныя вмѣстѣ? Съ одной стороны, эта система двухъ связанныхъ тѣлъ должна падать *медленнѣе* одного тяжелаго, такъ какъ легкое будетъ при паденіи задерживать тяжелое. Съ другой стороны, два связанныя тѣла должны падать *быстрѣе* одного тяжелаго тѣла, такъ какъ вѣсъ двухъ тѣлъ больше вѣса одного тѣла.

дающее тѣло проходитъ въ первую секунду 4,9 метра или 16,1 фута, и что, слѣдовательно, ускореніе $g = 9{,}8$ метра $= 32{,}2$ фута.

Галилею же принадлежатъ слѣдующіе основные законы паденія тѣлъ, а слѣдовательно и всякаго равно-ускореннаго движенія безъ начальной скорости:

Пріобрѣтенныя скорости пропорціональны временамъ.

Проходимыя пространства пропорціональны квадратамъ временъ.

Дѣйствительно, если тѣло двигалось

t сек., то скорость его $v = gt$, а пройденное пространство $s = \frac{gt^2}{2}$,

t' „ „ $v' = gt'$, „ „ $s = \frac{gt'^2}{2}$.

Отсюда находимъ

$$v : v' = gt : gt' \quad \text{или} \quad v : v' = t : t'.$$

$$s : s' = \frac{gt^2}{2} : \frac{gt'^2}{2} \quad \text{или} \quad s : s' = t^2 : t'^2.$$

Такимъ образомъ пространства, проходимыя падающимъ тѣломъ въ 3 и 5 секундъ, относятся между собой какъ $3^2 : 5^2$ или какъ $9 : 25$.

Наконецъ, замѣтивъ, что пространство, проходимое въ первую секунду $= \frac{g}{2}$, въ двѣ секунды $\frac{g}{2} \cdot 4$, въ три сек. $\frac{g}{2} \cdot 9$, въ четыре сек. $\frac{g}{2} \cdot 16$ и т. д., находимъ, что пространство, проходимое во *вторую* секунду $= \frac{4g}{2} - \frac{g}{2} = \frac{3g}{2}$; въ *третью* сек.: $\frac{9g}{2} - \frac{4g}{2} = \frac{5g}{2}$; въ *четвертую* секунду: $\frac{16g}{2} - \frac{9g}{2} = \frac{7g}{2} \ldots$

Отсюда заключаемъ, что пространства, проходимыя послѣдовательно въ 1-ю, 2-ю, 3-ю, 4-ю сек. относятся между собой, какъ $\frac{g}{2} : \frac{3g}{2} : \frac{5g}{2} : \frac{7g}{2} \ldots$ или какъ $1 : 3 : 5 : 7 \ldots$, т. е. *какъ рядъ нечетныхъ чиселъ*, начиная съ единицы.

§ 30. **Движеніе тѣла, брошеннаго вертикально вверхъ.** Положимъ, что нѣкоторое тѣло брошено съ поверхности земли вертикально вверхъ. Требуется найти: 1°, въ теченіе какого вре-

мени оно будетъ подниматься; 2°, до какой высоты оно поднимется; 3°, въ теченіе какого времени оно будетъ падать обратно на землю; 4°, какую скорость оно будетъ имѣть при концѣ паденія?

Очевидно, что это тѣло будетъ подниматься равномѣрно-замедленно до тѣхъ поръ, пока скорость его не будетъ равна 0. Слѣдовательно, полагая въ уравненіи скорости $v = v_0 - gt$ величину конечной скорости $v = 0$, найдемъ время восхожденія тѣла вверхъ:

$$0 = v_0 - gt; \quad t = \frac{v_0}{g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Зная время прохожденія t, найдемъ высоту h подъема по уравненію $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{gv_0^2}{2g^2}$; или $h = \frac{v_0^2}{2g}$ . . . . . (2) *)

Поднявшись на эту высоту, тѣло будетъ свободно падать обратно внизъ безъ начальной скорости. Такъ какъ при этомъ, по ур-ію (4″) § 26, $h = \frac{v^2}{2g}$, то, сравнивая это ур-іе съ ур-іемъ (2) $h = \frac{v_0^2}{2g}$, находимъ, что $\frac{v^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}$ или, что $v = v_0$ . . . . (3).

Наконецъ время паденія t_1 опредѣлимъ по уравненію скорости $v = gt_1$, откуда $t_1 = \frac{v}{g}$. Сравнивая это ур-іе съ ур-іемъ $t = \frac{v_0}{g}$ и, принимая во вниманіе, что $v = v_0$, заключаемъ, что $t_1 = t$. Итакъ: 1°, тѣло будетъ падать внизъ столько же времени, сколько оно поднималось вверхъ ($t_1 = t$) и 2°, при концѣ паденія оно будетъ имѣть такую же скорость, какъ и при началѣ восхожденія вверхъ.

Такимъ образомъ, каждой высотѣ подъема соотвѣтствуетъ своя опредѣленная скорость паденія и, обратно, всякой скорости паденія соотвѣтствуетъ своя опредѣленная высота подъема. Вслѣдствіе такого замѣчательнаго свойства, выраженіе $h = \frac{v^2}{2g}$ называютъ *высотой, соотвѣтствующей скорости паденія* (v), а получающуюся

---

*) Величину $h = \frac{v_0^2}{2g}$ еще проще можно было найти по уравненію $h = \frac{v_0^2 - v^2}{2g}$, положивъ въ немъ $v = 0$.

отсюда формулу $v = \sqrt{2gh}$ называютъ *скоростью, соотвѣтствующей высотѣ подъема* (h).

§ 31. Не трудно доказать, что скорости брошеннаго вверхъ и затѣмъ свободно падающаго тѣла будутъ равны не только въ крайнихъ точкахъ A и B, но и во всякой произвольной точкѣ C его пути (фиг. 1) или, иначе говоря, что *всякой высотѣ* h, *считая ее отъ поверхности земли, будетъ соотвѣтствовать одна и та же скорость* V_1, *все равно, будетъ ли тѣло подниматься вверхъ или свободно падать.*



Фиг. 1.

Дѣйствительно по ур-iю (4') § 26, имѣемъ, что высота восхожденія $AC = h_1 = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2g} \ldots (a)$,

гдѣ v_1 есть скорость въ точкѣ C при восхожденіи тѣла.

Если назовемъ черезъ v_2 скорость въ той же точкѣ C, пріобрѣтенную тѣломъ при паденіи съ высоты BC, то по ур-iю (4) § 26, имѣемъ, что та же величина $AC = h_1 = \frac{v^2 - v_2^2}{2g} \ldots (b)$.

Сравнивая равенства (a) и (b), находимъ, что $\frac{v_0^2 - v_1^2}{2g} = \frac{v^2 - v_2^2}{2g}$, откуда, принимая во вниманіе, что $v = v_0$, получимъ, что $v_1 = v_2$, т. е., что скорость тѣла въ произвольной точкѣ C его пути будетъ одна и та же, поднимается ли оно вверхъ или свободно падаетъ внизъ.

Замѣтивъ это, приходимъ къ заключенію, что *всякой скорости* v_1 тѣла, поднимающагося вертикально вверхъ или свободно падающаго внизъ, *соотвѣтствуетъ своя опредѣленная высота* $h_1 = \frac{v^2 - v_1^2}{2g}$ (1) и обратно, что *всякой высотѣ* точки его пути *соотвѣтствуетъ своя опредѣленная скорость* $v_1 = \sqrt{2g\,(h - h_1)}$ *), гдѣ h — полная высота подъема или паденія, а v — конечная скорость при паденіи или начальная при подъемѣ.

---

*) Эта формула легко получается изъ очевиднаго равенства $h - h_1 = \frac{v_1^2}{2g}$.

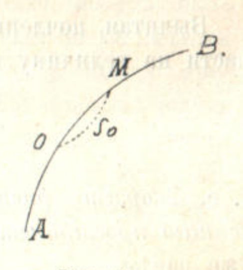
Формулы предыдущаго §: $h = \frac{v^2}{2g}$ и $v = \sqrt{2gh}$, относящіяся къ конечнымъ точкамъ A и B пути, прямо выводятся изъ только что полученныхъ болѣе общихъ формулъ, если положить въ (1) $v_1 = 0$ (для точки B), а во (2) $h_1 = 0$ (для точки A).

Уравненія движенія точки по данной траекторіи.

§ 32. Движеніе точки или тѣла, разсматриваемаго какъ точка, считается вполнѣ извѣстнымъ, если для каждаго даннаго момента времени возможно опредѣлить *мѣсто*, гдѣ находится движущаяся точка, а также ея *скорость* и *ускореніе* въ этотъ моментъ.

Для этого нужно знать: 1°, *траекторію* движенія точки, 2°, *положеніе ея на этой траекторіи въ начальный* моментъ времени, т. е. въ моментъ, съ котораго мы начинаемъ разсмотрѣніе движенія, и 3°, *зависимость между пространствомъ, проходимымъ точкою и временемъ.*

Положимъ, что извѣстна траекторія AB движущейся точки, (фиг. 2) а также извѣстно разстояніе $OM = s_0$ этой точки отъ нѣкоторой постоянной точки O траекторіи въ начальный моментъ времени. Эту постоянную точку O траекторіи обыкновенно называютъ *началомъ разстояній.* Разстоянія по траекторіи, откладываемыя отъ нея въ одну сторону (напр., вправо), считаются *положительными* а въ другую сторону (напр., влѣво)—*отрицательными.* Въ частномъ случаѣ въ начальный моментъ времени движущаяся точка можетъ находиться въ началѣ разстояній. Тогда $s_0 = O$.



Фиг. 2.

Если, кромѣ этихъ данныхъ, будетъ еще извѣстна зависимость проходимаго точкой пространства отъ времени, то движеніе точки будетъ вполнѣ извѣстно.

§ 33. Разсмотримъ сперва знакомыя уже намъ *прямолинейныя* движенія: равномѣрное и равно-перемѣнныя. Траекторіей, слѣдовательно, въ этихъ случаяхъ будетъ *прямая линія.*

I. Движеніе равномѣрное. Разстояніе движущейся точки въ начальный моментъ движенія отъ постоянной точки O траекторіи (отъ начала разстояній) пусть будетъ s_0. Зависимость проходимаго пространства отъ времени, какъ извѣстно, выражается уравненіемъ $s = vt$ (1). Буквой s будемъ теперь означать не величину пройденнаго пути, но *разстояніе движущейся точки отъ начала разстояній*, т. е. отъ опредѣленной точки O траекторіи. Замѣтивъ, что начальное разстояніе точки, т. е. разстояніе точки въ начальный моментъ времени (при $t = 0$) будетъ s_0, легко заключаемъ, что въ концѣ времени t разстояніе точки будетъ

$$s = s_0 + vt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Уравненіе (2) называется *уравненіемъ равномѣрнаго движенія.* Зная это уравненіе, не трудно указать мѣсто движущейся точки для каждаго момента времени, подставляя вмѣсто t число единицъ времени, предшествовавшихъ этому моменту.

Напр., чтобы узнать разстояніе точки отъ начала O разстояній въ началѣ 5-й секунды, надо положить $t = 4$ и т. д. Скорость точки есть величина постоянная. Чтобы ее опредѣлить, напишемъ уравненіе этого движенія для промежутка времени t_1.

Тогда $$s_1 = s_0 + vt_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Вычитая почленно изъ ур-ія (3) ур-іе (2), и раздѣливъ обѣ части на величину промежутка $t_1 - t$, получимъ

$$v = \frac{s_1 - s}{t_1 - t},$$

т. е. *скорость равномѣрнаго движенія равна отношенію пройденнаго пространства къ времени*, что, впрочемъ, найдено было уже ранѣе.

II. Движеніе равно-ускоренное безъ начальной скорости. Зависимость между проходимымъ пространствомъ и временемъ выражается уравненіемъ $s = \frac{at^2}{2}$. Прибавляя ко второй части разстояніе s_0 движущейся точки въ начальный моментъ, получимъ уравненіе этого движенія $s = s_0 + \frac{at^2}{2}$, гдѣ s означаетъ *разстояніе* движущейся точки отъ постоянной точки O траекторіи.

Скорость точки въ произвольный моментъ t опредѣляется уравненіемъ $v = at$.

111. Движеніе равно-ускоренное съ начальной скоростью v_0 *и движеніе равно-замедленное* выразятся, очевидно, уравненіями $s = s_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$ и $s = s_0 + v_0t - \frac{at^2}{2}$.

Скорости этихъ уравненій, какъ извѣстно, опредѣляются уравненіями $v = v_0 + at$ и $v = v_0 - at$.

Очень понятно, что уравненія проходимыхъ пространствъ въ этихъ движеніяхъ, т. е. уравненія

$$s = vt;\ s = \frac{at^2}{2};\ s = v_0t + \frac{at^2}{2};\ s = v_0t - \frac{at^2}{2}$$

будутъ вмѣстѣ съ тѣмъ и *уравненіями движеній* въ томъ случаѣ, если въ начальный моментъ ($t = 0$) движущаяся точка находилась въ началѣ разстояній ($s_0 = 0$).

§ 34. Изъ предыдущаго видно, что равномѣрное движеніе выражается уравненіемъ 1-й степени, а равномѣрно-перемѣнныя движенія выражаются уравненіями 2-й степени относительно перемѣнной величины t.

Теперь спрашивается, какими уравненіями опредѣляются другія перемѣнныя движенія? На это замѣтимъ, что могутъ быть выражены уравненіями только тѣ движенія, въ которыхъ имѣется нѣкоторая опредѣленная закономѣрная зависимость между проходимымъ пространствомъ и временемъ. Эти зависимости могутъ быть очень разнообразны, а слѣдовательно, и уравненія этихъ движеній имѣютъ самый разнообразный видъ. Это будутъ или алгебраическія уравненія выше 2-й степени относительно перемѣнной величины t, какъ напр., уравненіе $s = 2 - 3t + t^3$, или тригонометрическія уравненія, какъ напр., $s = 5 + Sin\,2t$ и т. д.

Посредствомъ этихъ уравненій мы точно также можемъ на данной траекторіи указать мѣсто движущейся точки въ произвольный моментъ времени.

Возьмемъ для примѣра уравненіе $s = 2 - 3t + t^3$. Замѣтимъ, что, при $t = 0, 1, 2, 3, 4....$, разстояніе $s = 2, 0, 4, 20, 54....$ Слѣдовательно, движущаяся точка въ начальный моментъ находилась на разстояніи 2-хъ единицъ длины (метровъ, футовъ и т. д.)

отъ начала разстояній, затѣмъ въ теченіе *первой* секунды приближалась къ нему и окончательно пришла въ него въ концѣ 1-й секунды. Затѣмъ съ начала 2-й секунды она перемѣнила направленіе и стала удаляться вправо отъ начала разстояній съ весьма быстро возрастающей скоростью.

Опредѣленіе скорости и ускоренія перемѣнныхъ прямолинейныхъ движеній.

§ 35. Во всякомъ перемѣнномъ движеніи, за исключеніемъ равноускореннаго и равно-замедленнаго, скорость и ускореніе представляютъ перемѣнныя величины, измѣняющіяся въ каждый слѣдующій моментъ времени. Поэтому понятія объ этихъ перемѣнныхъ величинахъ составляютъ, уподобляя ихъ болѣе простымъ и уже извѣстнымъ понятіямъ: постоянной скорости равномѣрнаго движенія и постояннаго ускоренія равномѣрно-перемѣннаго движенія (равно-ускореннаго или равно-замедленнаго).

Скоростью перемѣннаго движенія точки (или тѣла, разсматриваемаго, какъ точка) *въ данный моментъ времени t* называютъ ту скорость, которой обладала бы эта точка, если бы, начиная съ этого момента, скорость движенія вдругъ перестала измѣняться (сдѣлалась постоянной), т. е., если бы съ этого момента движеніе изъ перемѣннаго обратилось въ равномѣрное.

Но скорость равномѣрнаго движенія точки измѣряется пространствомъ, которое пройдетъ эта точка въ единицу времени. Слѣдовательно, скорость перемѣннаго движенія въ данный моментъ времени измѣряется тѣмъ пространствомъ, которое прошла бы точка въ слѣдующую за этимъ моментомъ единицу времени (секунду), если бы, начиная съ этого момента, движеніе вдругъ сдѣлалось равномѣрнымъ.

Совершенно подобнымъ образомъ, *ускореніемъ перемѣннаго движенія точки въ данный моментъ времени t* называютъ то ускореніе, которое имѣла бы эта точка, если бы, начиная съ этого момента, ускореніе движенія вдругъ перестало измѣняться (сдѣлалось постояннымъ), т. е., если бы съ этого момента движеніе изъ перемѣннаго обратилось въ равномѣрно-перемѣнное.

Но ускореніе равномѣрно-перемѣннаго движенія есть постоянная величина измѣненія скорости въ единицу времени. Слѣдовательно, ускореніе перемѣннаго движенія точки въ данный моментъ времени, есть то измѣненіе скорости, которое получила бы эта точка въ слѣдующую за этимъ моментомъ единицу времени (секунду), если бы, начиная съ этого момента, движеніе вдругъ обратилось въ равномѣрно-перемѣнное.

Какъ уже извѣстно, *средней скоростью* перемѣннаго движенія точки *за данный промежутокъ времени* называютъ скорость такого равномѣрнаго движенія, въ которомъ точка въ этотъ промежутокъ времени прошла бы такое же точно пространство, какъ и въ перемѣнномъ движеніи. Поэтому, что-

бы получить величину средней скорости за какой нибудь промежутокъ времени, надо величину пройденнаго при этомъ пространства раздѣлить на величину промежутка времени.

Подобнымъ же образомъ, *среднимъ ускореніемъ* перемѣннаго движенія точки *за данный промежутокъ времени* называютъ ускореніе такого равномѣрно-перемѣннаго движенія, въ которомъ точка въ этотъ промежутокъ времени получила бы точно такое же измѣненіе скорости, какъ и въ движеніи перемѣнномъ. Поэтому, чтобы получить величину средняго ускоренія за какой нибудь промежутокъ времени, надо величину полученнаго при этомъ измѣненія скорости раздѣлить на величину промежутка времени.

Уравненія, выражающія опредѣленную зависимость между перемѣнными величинами скорости или ускоренія и соотвѣтствующимъ имъ временемъ, называютъ *уравненіями скорости или ускоренія перемѣннаго движенія.*

Имѣя эти уравненія для какого нибудь движенія, легко опредѣлить его скорость или ускореніе для каждаго произвольнаго момента времени, если подставить, вмѣсто перемѣнной величины t, число единицъ времени, предшествующихъ этому моменту.

§ 36. Разсмотримъ теперь, какъ по данному уравненію перемѣннаго движенія можно опредѣлить его скорость и ускореніе въ какой нибудь заданный моментъ времени, а затѣмъ, какъ составить уравненія скорости и ускоренія этого движенія для всякаго произвольнаго момента времени.

Положимъ, что дано уравненіе движенія $s = 2 + t^3$ и требуется опредѣлить его скорость въ началѣ 2-й секунды.

Вычислимъ среднія скорости нашего перемѣннаго движенія за 1-ую и за 2-ю секунду движенія. Для этого, какъ извѣстно, слѣдуетъ вычислить пространства, пройденныя за 1-ую и за 2-ую секунду, и раздѣлить ихъ на величину времени, т. е. на 1 секунду.

Пространство, пройденное въ 1-ую секунду $= s_1 - s_0 = 2 + 1^3 - 2 = 1$.

" " 2-ую " $= s_2 - s_1 = 2 + 2^3 - 2 - 1 = 7$.

Такъ какъ промежутокъ времени = 1 сек., то 1 и 7 будутъ среднія скорости за 1-ю и 2-ю секунду.

Какъ видимъ, онѣ очень сильно различаются другъ отъ друга, а потому даютъ только самое грубое понятіе о скорости въ началѣ 2-й секунды, т. е. что она больше 1 и меньше 7. Чтобы получить болѣе точное понятіе объ этой скорости, будемъ вычислять среднія скорости для меньшихъ промежутковъ времени, изъ которыхъ одинъ предшествовалъ бы моменту начала 2-й секунды, а другой слѣдовалъ бы за нимъ. Возьмемъ промежутки въ $^1/_2$ секунды.

Средняя скорость за 2-ую половину 1-й секунды:

$$\frac{s_1 - s_{0,5}}{^1/_2} = \frac{2 + 1 - 2 - (^1/_2)^3}{^1/_2} = \frac{1 - ^1/_8}{^1/_2} = ^7/_4 = 1,75.$$

Средняя скорость за 1-ю половину 2-ой секунды:

$$\frac{s_{1,5} - s_1}{^1/_2} = \frac{2 + (^3/_2)^3 - 2 - 1}{^1/_2} = \frac{^{27}/_8 - 1}{^1/_2} = ^{19}/_4 = 4,75.$$

Возьмемъ промежутки времени въ $^1/_4$ секунды.

Средняя скорость за 4-ю четверть 1-й секунды:

$$\frac{s_1 - s_{0,75}}{^1/_4} = \frac{2 + 1 - 2 - (^3/_4)^3}{^1/_4} = \frac{1 - ^{27}/_{64}}{^1/_4} = {^{37}/_{16}} = 2,3125.$$

Средняя скорость за 1-ю четверть 2-й секунды:

$$\frac{s_{1,25} - s_1}{^1/_4} = \frac{2 + (^5/_4)^3 - 2 - 1}{^1/_4} = \frac{^{125}/_{64} - 1}{^1/_4} = {^{61}/_{16}} = 3,8125.$$

Какъ видимъ, величины среднихъ скоростей сближаются по мѣрѣ уменьшенія промежутковъ. Возьмемъ еще меньшіе промежутки.

Среднія скорости для смежныхъ промежутковъ въ 0,1 секунды:

$$\frac{s_1 - s_{0,9}}{0,1} = \frac{2 + 1 - 2 - 0,729}{0,1} = \frac{0,271}{0,1} = 2,71.$$

$$\frac{s_{1,1} - s_1}{0,1} = \frac{2 + 1,331 - 2 - 1}{0,1} = \frac{0,331}{0,1} = 3,31.$$

Среднія скорости для смежныхъ промежутковъ въ 0,01 секунды:

$$\frac{s_1 - s_{0,99}}{0,01} = \frac{2 + 1 - 2 - 0,970299}{0,01} = \frac{0,029701}{0,01} = 2,9701.$$

$$\frac{s_{1,01} - s_1}{0,01} = \frac{2 + 1,030301 - 2 - 1}{0,01} = \frac{0.030301}{0,01} = 3,0301.$$

Теперь уже ясно, что среднія скорости, по мѣрѣ уменьшенія промежутковъ до нуля, безгранично приближаются къ величинѣ 3, какъ къ предѣлу. Это предѣльное значеніе и есть скорость нашего перемѣннаго движенія въ началѣ 2-ой секунды.

Вычислимъ величину этого предѣла. Для этого опредѣлимъ среднюю скорость перемѣннаго движенія для весьма малаго промежутка времени, слѣдующаго за 1-й секундой. Назовемъ величину этого промежутка черезъ $\triangle t$. Тогда средняя скорость

$$\frac{s_{1+\triangle t} - s_1}{\triangle t} = \frac{2 + (t + \triangle t)^3 - 2 - 1^3}{\triangle t} = \frac{1 + 3\triangle t + 3(\triangle t)^2 + \triangle t^3 - 1}{\triangle t} =$$

$$= \frac{3\triangle t + 3(\triangle t)^2 + (\triangle t)^3}{\triangle t} = 3 + 3\triangle t + (\triangle t)^2.$$

Чтобы найти предѣлъ средней скорости, надо положить $\triangle t = 0$. При этомъ члены, содержащіе $\triangle t$, обратятся въ нули, и мы получимъ, что предѣлъ средней скорости $= 3$.

Тоже самое значеніе мы получили бы, если бы вычисляли предѣльное значеніе для промежутка времени, предшествовавшаго началу 2-ой секунды, при уменьшеніи величины этого промежутка до нуля. Итакъ *скорость перемѣннаго движенія въ данный моментъ времени есть предѣлъ средней скорости этого движенія для промежутка времени, предшествующаго или слѣдующаго за этимъ моментомъ, при неограниченномъ уменьшеніи этого промежутка до нуля.*

Найдемъ теперь скорость нашего движенія въ произвольный моментъ времени t. Для этого вычислимъ среднюю скорость этого движенія для весьма малаго промежутка $\triangle t$, слѣдующаго за этимъ моментомъ, и затѣмъ найдемъ предѣлъ этой средней скорости. Средняя скорость за промежутокъ $t + \triangle t = \frac{s_{t+\triangle t} - s_t}{\triangle t} = \frac{2 + (t + \triangle t)^3 - 2 - t^3}{\triangle t} =$

$$= \frac{t^3 + 3t^2\triangle t + 3t(\triangle t)^2 + (\triangle t)^3 - t^3}{\triangle t} = \frac{3t^2\triangle t + 3t(\triangle t)^2 + (\triangle t)^3}{\triangle t} =$$

$= 3t^2 + 3t\triangle t + (\triangle t)^2$. Предѣлъ средн. скорости (при $\triangle t = 0$) $= 3t^2$.

Итакъ, скорость нашего движенія за произвольный моментъ времени опредѣляется уравненіемъ $v = 3t^2$.

§ 36. Для провѣрки правильности опредѣленія скорости перемѣннаго движенія вычислимъ еще скорость въ произвольный моментъ движенія свободно падающаго тѣла безъ начальной скорости v_0. Уравненіе этого движенія $s = \frac{gt^2}{2}$.

Средняя скорость для промежутка времени $\triangle t$, слѣдующаго за моментомъ t, будетъ $\frac{s_{t+\triangle t} - s_t}{\triangle t} = \frac{{}^1\!/_2\, g\,(t + \triangle t)^2 - {}^1\!/_2\, gt^2}{\triangle t} =$

$$= \frac{{}^1\!/_2\, gt^2 + gt\triangle t + {}^1\!/_2\, g\,(\triangle t)^2 - {}^1\!/_2\, gt^2}{\triangle t} = \frac{gt\triangle t + {}^1\!/_2\, g\,(\triangle t)^2}{\triangle t} =$$

$= gt + {}^1\!/_2\, g\triangle t$.

Предѣлъ $\frac{s_{t+st} - s_t}{\triangle t}$ (при $\triangle t = 0$) $= gt$.

Итакъ, скорость этого движенія за произвольный моментъ t будетъ опредѣляться уравненіемъ $v = gt$, которое уже было нами найдено другимъ путемъ.

§ 37. Перейдемъ теперь къ опредѣленію ускоренія перемѣннаго движенія въ произвольный моментъ времени.

Мы только что разсмотрѣли, какъ по *уравненію* перемѣннаго *движенія* опредѣляется его *скорость*. Совершенно подобнымъ же образомъ изъ *уравненія скорости* перемѣннаго движенія опредѣляется его *ускореніе*.

Возьмемъ наше прежнее уравненіе движенія $s = 2 + t^3$ и постараемся опредѣлить его ускореніе въ началѣ 2-ой секунды.

Мы уже знаемъ, что уравненіе скорости этого движенія есть $v = 3t^2$.

Вычислимъ среднее ускореніе въ 1-ую и 2-ую секунду движенія. Для этого найдемъ величины измѣненія скорости за оба эти промежутка времени и раздѣлимъ ихъ на величину этихъ промежутковъ, т. е. на одну секунду.

Среднее ускореніе за 1-ю секунду *) $= \frac{v_1 - v_0}{1} = \frac{3.1^2}{1} = 3$.

" " " 2-ю " $= \frac{v_2 - v_1}{1} = \frac{3.2^2 - 3.1^2}{1} = \frac{12 - 3}{1} = 9$.

*) Начальная скорость $v_0 = 0$, такъ какъ изъ уравненія $v = 3t^2$, слѣдуетъ что при $t = 0$ и $v = 0$.

Такъ какъ найденныя величины среднихъ ускореній сильно различаются другъ отъ друга и даютъ лишь очень грубое понятіе объ ускореніи въ началѣ 2-ой секунды, т. е., что оно болѣе 3 и менѣе 9, то вычислимъ среднія ускоренія для болѣе малыхъ промежутковъ времени, напр. въ 0,1 и 0,01 секунды, изъ которыхъ одинъ предшествовалъ бы моменту начала 2-ой секунды, а другой слѣдовалъ бы за нимъ.

Среднія ускоренія для смежныхъ промежутковъ въ 0,1 секунды:

$$\frac{v_1 - v_{0,9}}{0,1} = \frac{3.1 - 3.0,9^2}{0,1} = \frac{3 - 2,43}{0,1} = 5,7.$$

$$\frac{v_{1,1} - v_1}{0,1} = \frac{3.1,1^2 - 3.1}{0,1} = \frac{3,63 - 3}{0,1} = 6,3.$$

Среднія ускоренія для смежныхъ промежутковъ въ 0,01 секунды:

$$\frac{v_1 - v_{0,99}}{0,01} = \frac{3.1 - 3.0,99^2}{0,01} = \frac{3 - 2,9403}{0,01} = 5,97$$

$$\frac{v_{1,01} - v_1}{0,01} = \frac{3.1,01^2 - 3.1}{0,01} = \frac{3,0603 - 3}{0,01} = 6,03.$$

Какъ видимъ, среднія ускоренія, по мѣрѣ уменьшенія промежутковъ времени до нуля, неограниченно приближаются къ нѣкоторому предѣлу. Это предѣльное значеніе средняго ускоренія и есть ускореніе перемѣннаго движенія въ началѣ 2-ой секунды.

Для того, чтобы вычислить величину этого предѣла, найдемъ среднее ускореніе для весьма малаго промежутка времени $\triangle t$, слѣдующаго за 1-й секундой, и затѣмъ въ полученномъ выраженіи положимъ, что величина $\triangle t = 0$.

$$\frac{v_{1+\triangle t} - v_1}{\triangle t} = \frac{3\,(1+\triangle t)^2 - 3.1}{\triangle t} = \frac{3 + 6\triangle t + 3\,(\triangle t)^2 - 3}{\triangle t} =$$

$$\frac{6\triangle t + 3\triangle t^2}{\triangle t} = 6 + 3\triangle t.$$ Предѣлъ выраженія $6 + 3\triangle t$ (при $\triangle t = 0$) $= 6$.

Такимъ образомъ, искомое ускореніе въ началѣ 2-ой секунды $= 6$.

Такое же точно значеніе мы получили бы, вычисляя предѣлъ средняго ускоренія для промежутка времени, предшествовавшаго данному моменту, при уменьшеніи величины этого промежутка до нуля.

Итакъ, *ускореніе перемѣннаго движенія въ данный моментъ есть предѣлъ средняго ускоренія для промежутка времени, предшествующаго или слѣдующаго за этимъ моментомъ, при уменьшеніи этого промежутка до нуля.*

§ 38. Перейдемъ теперь къ болѣе общему вопросу, какъ опредѣлить ускореніе даннаго перемѣннаго движенія въ любой моментъ времени, или иначе говоря, какъ найти уравненіе, связывающее двѣ перемѣнныя величины: ускореніе a и время t.

Для этого положимъ, что слѣдуетъ найти ускореніе для произвольнаго момента, напр. для конца t-ой секунды.

Согласно предыдущему, найдемъ сперва среднее ускореніе для весьма малаго промежутка времени $\triangle t$, слѣдующаго за этимъ моментомъ и за-

тѣмъ опредѣлимъ предѣлъ средняго ускоренія, предполагая, что промежутокъ $\triangle t$ уменьшается до нуля.

$$\text{Среднее ускореніе} = \frac{v_{t+\triangle t} - v_t}{\triangle t} = \frac{3\,(t+\triangle t)^2 - 3\,t^2}{\triangle t} =$$

$$= \frac{3\,t^2 + 6\,t\triangle t + 3\,(\triangle t)^2 - 3\,t^2}{\triangle t} = \frac{6\,t\triangle t + 3\,(\triangle t)^2}{\triangle t} = 6\,t + 3\,\triangle t.$$

Предѣлъ выраженія $6\,t + 3\,\triangle t$ (при $\triangle t = 0$) $= 6\,t$.

Итакъ, искомое ускореніе $a = 6\,t$.

Полученное уравненіе и есть уравненіе ускоренія даннаго перемѣннаго движенія. Подставляя въ немъ вмѣсто t любое значеніе 1,2,3,.... секунды мы тотчасъ же получимъ величину ускоренія для конца 1-ой, 2-ой, 3-ьей... секунды.

§ 39. Для примѣра опредѣлимъ еще ускореніе свободнаго паденія безъ начальной скорости v_0. Уравненіе этого движенія есть $s = {}^1/_2\,gt^2$.

Уравненіе скорости, какъ уже было выведено (§ 36), есть $v = gt$.

Среднее ускореніе для промежутка $\triangle t$, слѣдующаго за моментомъ конца времени t будетъ

$$\frac{v_{t+\triangle t} - v_t}{\triangle t} = \frac{g\,(t+\triangle t) - gt}{\triangle t} = \frac{gt + g\triangle t - gt}{\triangle t} = g.$$

Для упражненія предлагаемъ провѣрить уравненія скорости и ускоренія для движеній, данныхъ слѣдующими урвненіями:

$s = 2\,t^3 + t + 5;$ $v = 6\,t^2 + 1;$ $a = 12\,t.$

$s = 3 + t^3 - t^2 - t;$ $v = 3\,t^2 - 2\,t - 1;$ $a = 6\,t - 2.$

$s = t^4 - t^3;$ $v = 4\,t^3 - 3t^2;$ $a = 12\,t^2 - 6\,t.$

$s = mt^3 + nt^2 + pt + g;$ $v = 3\,m\,t^2 + 2\,nt + p;$ $a = 6\,mt + 2\,n.$

Изъ разсмотрѣнія этихъ ур-ій легко можно замѣтить законъ составленія уравненія скорости изъ уравненія движенія, и уравненія ускоренія изъ уравненія скорости, если 2-я часть уравненій имѣетъ видъ алгебраическаго многочлена. Именно, чтобы изъ уравненія движенія найти уравненіе скорости, надо у всѣхъ членовъ, содержащихъ перемѣнную величину t, понизить показателя на 1, а коэффиціентъ умножить на прежняго показателя; члены же, не содержащіе перемѣнной t, отбросить. Точно такимъ же образомъ изъ уравненія скорости получается уравненіе ускоренія.

Графическій способъ изображенія движеній.

§ 40. Изученіе различныхъ движеній заставляетъ насъ различать два рода величинъ, характеризующихъ движеніе, а именно величины *постоянныя* и величины *перемѣнныя*.

Такъ мы знаемъ, что скорость въ равномѣрномъ движеніи и ускореніе въ равномѣрно-перемѣнномъ движеніи суть постоянныя величины. Наоборотъ, пространство и время во всякомъ движеніи

суть величины перемѣнныя. Точно также, скорость въ перемѣнномъ движеніи, а также ускореніе во всякомъ перемѣнномъ движеніи, кромѣ равномѣрно-ускореннаго и равномѣрно-замедленнаго, также суть перемѣнныя величины.

Это справедливо только относительно *прямолинейныхъ* движеній. Въ дальнѣйшемъ мы увидимъ, что въ *криволинейныхъ* движеніяхъ скорость и ускореніе *всегда* будутъ перемѣнными величинами, *хотя бы эти движенія были и равномѣрными.*

§ 41. Разсматривая различнаго рода уравненія движенія:

$$s = s_0 + vt;\ s = \frac{at^2}{2};\ s = s_0 + v_0 t \pm \frac{at^2}{2};\ s = 3 + 2t + t^3....,$$

а также уравненія скорости и ускоренія:

$$v = v_0 + at;\ v = 2 + 3t^2;\ a = 6t....$$

мы легко замѣчаемъ, что всѣ перемѣнныя величины, какъ-то: пространство s, скорость v, ускореніе a являются перемѣнными зависимыми или *функціями* одной и той же перемѣнной независимой, а именно времени t.

Опредѣлить въ каждомъ частномъ случаѣ видъ этой функціи или, говоря иначе, составить уравненіе, связывающее эти величины съ временемъ t, и значитъ *найти аналитически законъ движенія для этого частнаго случая.*

Въ общемъ видѣ функціональную зависимость между перемѣнными величинами изображаютъ буквами F, f, φ, ϕ, и т. д.

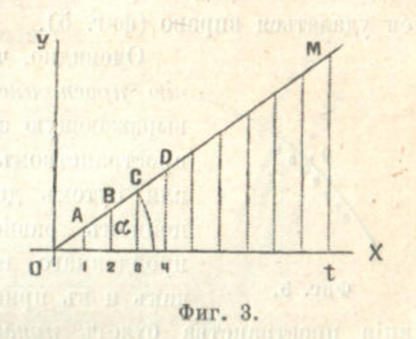
Такимъ образомъ $s = F(t)$, $v = f(t)$ и т. п.

§ 42. Познакомимся теперь съ *графическимъ изображеніемъ законовъ движенія.* Этотъ способъ, уступая въ точности *аналитическому* (выраженію законовъ движенія уравненіемъ), превосходитъ его своею наглядностью.

Построимъ, во-первыхъ, линію пространства, проходимаго точкой въ равномѣрномъ движеніи, предполагая, что въ начальный моментъ времени (т. е. при $t = 0$) точка находилась въ началѣ разстояній ($s_0 = 0$).

Вопросъ сводится, слѣдовательно, къ построенію уравненія $s = vt$, гдѣ v есть нѣкоторая *постоянная* величина (2, 3, 4.... сантим. и т. п.).

Возьмемъ двѣ прямоугольныя оси координатъ OX и OY (фиг. 3) и на одной изъ нихъ, напр., на оси x-въ отложимъ отъ начала O координатъ въ опредѣленномъ масштабѣ равныя части $1, 2, 3 \ldots t$, соотвѣтствующія единицамъ времени (напр., секундамъ), затѣмъ изъ точекъ дѣленія возставимъ перпендикуляры и на нихъ отложимъ величины $A1$, $B2$, $C3 \ldots$ соотвѣтственно пройденныхъ пространствъ (также въ опредѣленномъ масштабѣ). Соединивъ полученныя точки A, B, $C \ldots$ съ точкой O, получимъ искомую линію OM пространства, которая будетъ *прямая*, такъ какъ выражается уравненіемъ 1-ой степени *).



Фиг. 3.

Не трудно построить линію пространства въ равномѣрномъ движеніи, если въ начальный моментъ точка не находилась въ началѣ разстоянія, по уравненію $s = s_0 + vt$.

Если начальное разстояніе s_0 точки находится *направо* отъ начала разстояній, то оно считается *положительнымъ* и откладывается по оси у-въ *вверхъ* отъ точки O, а если оно находится *влѣво* отъ начала разстояній, то считается *отрицательнымъ* и откладывается *внизъ* отъ точки O (фиг. 4). Въ остальномъ построеніе вполнѣ тождественно съ предыдущимъ. Прямая AN представляетъ графически уравненіе $s_1 = s_0 + v_1 t$, а прямая BP — уравненіе $s_2 = -s_0 + v_2 t$ **).

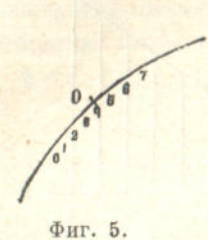
Фиг. 4.

---

*) Полезно замѣтить, что *величина угла наклона* прямой пространства къ оси x-въ характеризуетъ *скорость движенія*. Дѣйствительно изъ чертежа видимъ, что $\frac{A1}{O1} = \frac{B2}{O2} = \ldots = tang\alpha$. Но отношенія $\frac{A1}{O1} = \frac{B2}{O2} = \ldots$ суть отношенія пройденныхъ пространствъ къ времени и, слѣдовательно, представляютъ *скорость* v равномѣрнаго движенія. Итакъ, $v = tang\alpha$, т. е. скорость равномѣрнаго движенія есть тангенсъ угла наклона прямой пространствъ къ оси x-въ (къ оси временъ).

**) Очевидно, что $v_1 = tang\alpha_1$, а $v_2 = tang\alpha_2$.

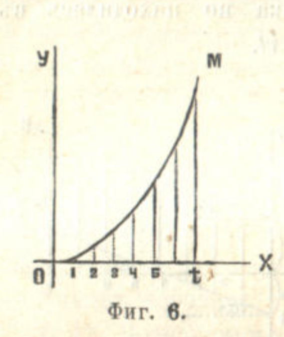
Въ точкѣ k, соотвѣтствующей концу 4-ой секунды, прямая BP пересѣкаетъ ось x-въ. Это показываетъ, что движущаяся точка, находившаяся первоначально влѣво отъ начала разстояній, въ концѣ 4-ой секунды пришла въ эту точку, а затѣмъ стала отъ нея удаляться вправо (фиг. 5).



Фиг. 5.

Очевидно, что не слѣдуетъ смѣшивать *линію пространства*, т. е. линію, графически выражающую зависимость между пройденнымъ пространствомъ и временемъ, съ *траекторіей*, или путемъ движущейся точки. Въ криволинейномъ равномѣрномъ движеніи уравненіе пройденнаго пространства будетъ такое же, какъ и въ прямолинейномъ, т. е. $s = vt$, т. е. линія пространства будетъ *прямая*, хотя *траекторія* будетъ— *кривая* линія.

§ 43. Построимъ точно такимъ же способомъ линію пространствъ равномѣрно-ускореннаго движенія безъ начальной скорости при условіи, что въ начальный моментъ ($t = o$) точка находится въ началѣ разстояній ($s_0 = o$), т. е. построимъ уравненіе $s = \frac{at^2}{2}$. Линія пространства (фиг. 6) будетъ въ этомъ кривою, а именно *параболой*, вершина которой совпадаетъ съ началомъ O координатъ.



Фиг. 6.

Кривыя пространствъ равномѣрно-ускоренныхъ движеній

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} \text{ и } s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

также представляютъ *параболы* *), но съ вершиной, не находящейся въ началѣ координатъ. На фиг. 7 изображены три кривыя, соотвѣтствующія тремъ частнымъ случаямъ уравненій равномѣрно-ускореннаго движенія, а именно уравненіямъ

$$s_1 = 1{,}5\, t^2;\ s_2 = 2t + 1{,}5\, t^2 \text{ и } s_3 = 4 + 2t + 1{,}5\, t^2,$$

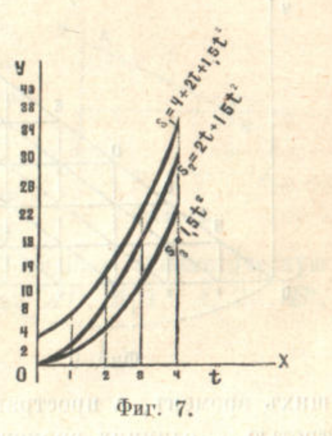
т. е. при $a = 3$; $v_0 = 2$ и $s_0 = 4$.

---

*) Такъ какъ всякое уравненіе, въ которомъ одна перемѣнная 1-ой степени, а другая 2-ой степени графически изображается параболой.

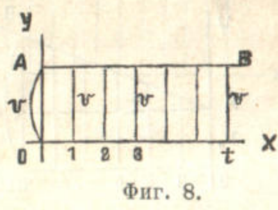
Кривыя пространствъ равномѣрно-замедленныхъ движеній также будутъ параболы, но обращенныя не выпуклой, а вогнутой стороной къ оси x-въ (къ оси временъ).

Линіи пространствъ другихъ перемѣнныхъ движеній представляютъ также различныя кривыя.



Фиг. 7.

§ 44. Совершенно такимъ же образомъ строятся линіи скоростей и ускореній. Чтобы построить линію скорости равномѣрнаго движенія, отложимъ на оси x-въ (временъ) равныя части (фиг. 8), соотвѣтствующія 1, 2, 3 . . . . t единицамъ времени, а на возставленныхъ перпендикулярахъ отложимъ одинаковыя величины скорости (v). Прямая AB, соединяющая концы перпендикуляровъ и параллельная оси временъ, выражаетъ искомую линію скорости. Слѣдуетъ замѣтить, что величина пройденнаго пространства s выражается площадью прямоугольника $OABt$, такъ какъ $OA = v$, $Ot = t$, а $s = vt$.



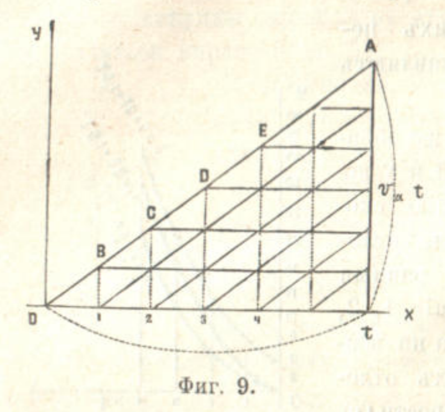
Фиг. 8.

Линія скорости въ равноускоренномъ движеніи безъ начальной скорости ($v = at$) изобразится, очевидно, прямою OA, проходящею черезъ начало O координатъ и наклонною къ оси временъ *) ox (фиг. 9). Площадь $\triangle$-ка $OAt = \frac{at^2}{2}$ выражаетъ величину s пройденнаго пространства.

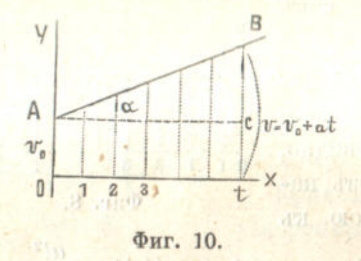
---

*) Полезно замѣтить, что ускореніе въ равно-ускоренномъ движеніи характеризуется угломъ α наклона линіи скорости къ оси временъ ox. Дѣйствительно отношеніе $\frac{B1}{O1} = tang\alpha$. Но отношеніе скорости къ времени въ равно-ускоренномъ движеніи и есть ускореніе, такъ какъ изъ ур-ія $v = at$ имѣемъ $a = \frac{v}{t}$. Итакъ, $a = tang\ \alpha$, т. е. *ускореніе равно-ускореннаго движенія выражается тангенсомъ угла наклона линіи скорости къ оси временъ.*

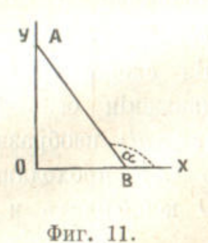
Проведя изъ точекъ 1, 2, 3.... прямыя, параллельныя $0A$, а изъ точекъ пересѣченія перпендикуляровъ съ прямою $0A$ — прямыя, параллельныя оси x-въ, разобьемъ площади, выражающія величины пройденныхъ пространствъ на равные треугольники. Изъ чертежа видно, что отношеніе площадей: $0B1 : 0C2 : 0D3 : ... = 1 : 2^2 : 3^2 ....$, а отношеніе площадей $0B1 : BC12 : CD23 .... = 1 : 3 : 5 ....$, т. е., что пространства, проходимыя въ одну, двѣ, три... единицы времени, относятся, какъ квадраты соотвѣтствующихъ временъ, а пространства, проходимыя въ первую, вторую, третью.... единицу времени, какъ рядъ нечетныхъ чиселъ, что и выведено было ранѣе (§ 29).



Фиг. 9.



Фиг. 10.



Фиг. 11.

Въ равно-ускоренномъ движеніи съ начальной скоростью линія скоростей ($v = v_0 + at$) изображается прямою AB (фиг. 10), а величина пройденнаго пространства площадью трапеціи $OABt =$

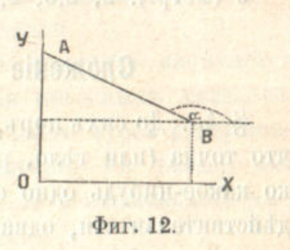
$$= \frac{(v_0 + v)\ t}{2} = v_0\,t + \frac{at^2}{2}\ ^{*})$$

---

*) Замѣтимъ, что трапеція $OABt$ состоитъ изъ прямоугольника $OACt$, выражающаго пространство, пройденное во время t въ равномѣрномъ движеніи со скоростью v_0, и треугольника ABC, выражающаго пространство, пройденное въ то же время въ равноускоренномъ движеніи, съ ускореніемъ a.

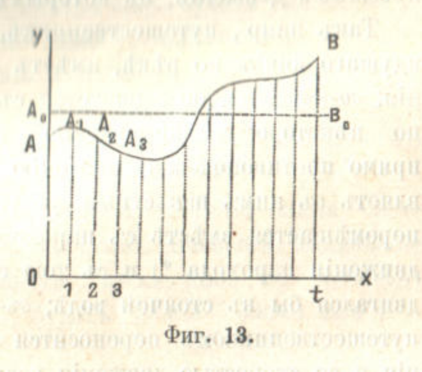
Читателямъ, усвоившимъ сущность графическаго способа, не трудно догадаться, линіи какихъ скоростей движеній изображены на фиг. 11 и 12 *).

Въ общемъ случаѣ перемѣннаго движенія, въ которомъ не только скорость, но и ускореніе — перемѣнная величина, линія скорости изобразится нѣкоторой кривой, напр., AB (фиг. 13).



Фиг. 12.

Площадь $OABt$, замыкаемая этой кривой, осью временъ и двумя ординатами AO и Bt, представляетъ, какъ и ранѣе, пройденное пространство. Опредѣливъ среднюю ариѳметическую изъ скоростей, выражаемыхъ ординатами AO, $A_1 1$, $A_2 2 \ldots Bt$, найдемъ прямую A_0O, которая представляетъ собою не что иное, какъ *среднюю скорость* даннаго перемѣннаго движенія. Проведя прямую A_0B_0 параллельно оси временъ (x-въ), получимъ прямоугольникъ OA_0B_0t, равновеликій площади $OABt$, и, слѣдовательно, также представляющій величину пути, пройденнаго во время t.



Фиг. 13.

Упражненія. Построить линіи пространствъ, скоростей и ускореній слѣдующихъ движеній:

1. Свободнаго паденія тѣлъ: $s = \frac{gt^2}{2} = 16t^2$(фут.) $= 4{,}9$(метр.).

2. $s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$, гдѣ $v_0 = 4$ м.

3. $s = s_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}$, гдѣ $s_0 = 2$ м.; $v_0 = 4$ м.

4. $s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, гдѣ $v_0 = 30$ м.

5. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

---

*) Какое значеніе имѣетъ тангенсъ угла α наклона прямой AB (фиг. 11 и 12) къ оси x-въ (временъ)?

6. Построить линію пространствъ движенія, заданнаго слѣд. таблицей:

t (сек.):	0;	1;	2;	3;	4;	5;	6;	7;	8;	9.
s (метр.):	2;	2,5;	2,8;	3;	3,1;	2,6;	2,1;	1,5;	0,7;	0.

Сложеніе прямолинейныхъ движеній.

§ 45. До сихъ поръ, при изученіи движеній, мы предполагали, что точка (или тѣло, разсматриваемое, какъ точка) имѣетъ только какое-нибудь одно опредѣленное прямолинейное движеніе. Въ дѣйствительности, однако, точка (или тѣло) можетъ имѣть одновременно нѣсколько движеній по различнымъ направленіямъ и съ различными скоростями или, лучше сказать, точка (или тѣло) имѣетъ одно *сложное* движеніе, составленное изъ нѣсколькихъ *простыхъ* движеній, въ которыхъ она одновременно участвуетъ.

Такъ напр., путешественникъ, гуляющій по палубѣ парохода, идущаго внизъ по рѣкѣ, имѣетъ одновременно слѣдующія движенія: *во-первыхъ*, онъ движется съ извѣстной скоростью по палубѣ по нѣкоторому направленію, которое или одинаково, или прямо противоположно движенію парохода, или наконецъ составляетъ съ нимъ извѣстный уголъ; *во-вторыхъ*, при этомъ онъ перемѣщается вмѣстѣ съ пароходомъ по направленію собственнаго движенія парохода *) и съ тою скоростью, съ которою пароходъ двигался бы въ стоячей водѣ; *въ-третьихъ*, пароходъ вмѣстѣ съ путешественникомъ переносится рѣкою по направленію ея теченія и со скоростью движенія воды въ рѣкѣ. Наконецъ можно принять во вниманіе, что путешественникъ вмѣстѣ съ пароходомъ и съ самой рѣкою участвуетъ въ двоякомъ движеніи земли вокругъ ея оси и вокругъ солнца.

Наблюдатель, стоящій на палубѣ того же самаго парохода, можетъ видѣть только одно первое движеніе путешественника. Наблюдатель, стоящій на берегу, видитъ, что движеніе путешественника есть *сложное* или составное изъ трехъ первыхъ *простыхъ* движеній. Это сложное движеніе называется *абсолютнымъ* по отношеніи къ неподвижнымъ земнымъ предметамъ, хотя, строго говоря, оно не будетъ абсолютнымъ, такъ какъ сама земля также движется.

*) зависящаго отъ направленія руля.

Если вообразить наблюдателя, находящагося въ неподвижномъ мѣстѣ пространства и слѣдящаго за путешественникомъ, то только такой наблюдатель могъ бы усмотрѣть истинное абсолютное движеніе путешественника, какъ составное изъ движеній: самого путешественника, парохода и, наконецъ, земли.

Опредѣленіемъ истиннаго абсолютнаго движенія занимается *небесная механика*, т. е. наука о движеніи небесныхъ тѣлъ, составляющая часть астрономіи. Для цѣли нашего курса совершенно достаточно опредѣлить абсолютныя движенія въ только что указанномъ значеніи, т. е. по отношенiи къ неподвижнымъ земнымъ предметамъ.

Приведемъ еще примѣръ: По горизонтальному прямому жолобу, неподвижно лежащему на полу, катится шаръ. Движеніе центра шара будетъ *простое* прямолинейное *). Но если станемъ передвигать жолобъ по полу, то движеніе центра шара будетъ уже *сложное*, состоящее изъ движенія шара по жолобу, называемаго *относительнымъ* движеніемъ, и движенія жолоба по полу, называемаго *переноснымъ* движеніемъ. Переносное движеніе, очевидно, есть ничто иное, какъ *движеніе самой траекторіи*, описываемой относительнымъ движеніемъ **).

§ 46. Само собой понятно, что въ томъ случаѣ, когда сложное движеніе состоитъ изъ двухъ простыхъ движеній, направленныхъ *по одной прямой*, пространство, пройденное въ сложномъ движеніи въ нѣкоторое время t, будетъ равно *суммѣ* или *раз-*

---

*) Всѣ остальныя точки шара имѣютъ *сложное движеніе*, составленное изъ движеній: прямолинейнаго по жолобу и вращательнаго при катаніи. Движеніе всего шара, разсматриваемаго, какъ система составляющихъ его матеріальныхъ точекъ, также будетъ *сложное*, составленное изъ *поступательнаго* движенія по жолобу и *вращательнаго* около центра.

**) Здѣсь умѣстно упомянуть еще о такъ называемыхъ *кажущихся движеніяхъ.* Такъ называются движенія, которыя видитъ наблюдатель, самъ перемѣщающійся въ пространствѣ. Само собой понятно, что эти движенія не соотвѣтствуютъ дѣйствительности. Такъ напр., мы видимъ, что солнце и звѣзды движутся съ востока на западъ. Эти движенія суть только *кажущіяся*, происходящія оттого, что мы наблюдаемъ ихъ, сами находясь на земномъ шарѣ, вращающемся въ обратномъ направленіи, т. е. съ запада на востокъ. Точно также путешественнику, находящемуся на пароходѣ, кажется, что онъ стоитъ на одномъ мѣстѣ, а берега плывутъ мимо него въ направленіи, обратномъ движенію парохода, и т. д.

ности пространствъ, пройденныхъ въ это же время въ каждомъ изъ простыхъ движеній, смотря по тому, направлены ли они въ одну сторону или въ прямо-противоположныя стороны.

Если оба простыя движенія суть вмѣстѣ съ тѣмъ и равномѣрныя со скоростями v_1 и v_2, то пространство, пройденное во время t въ сложномъ движеніи, будетъ $s = s_1 \pm s_2 = v_1 t \pm v_2 t = (v_1 \pm v_2) t$ или $s = vt$, гдѣ $v = v_1 \pm v_2$.

Итакъ, сложное движеніе въ этомъ случаѣ будетъ также *равномѣрное*, и *скорость его* будетъ равна *суммѣ* или *разности* скоростей составляющихъ движеній, смотря по ихъ направленію.

Очевидно, что это правило легко распространить на случай, когда сложное движеніе состоитъ болѣе, чѣмъ изъ двухъ простыхъ движеній.

Примѣръ 1. Скорость парохода въ стоячей водѣ равна 4,5 метра въ 1″, а скорость теченія рѣки 1,2 метра въ 1″. Найти пространство, пройденное пароходомъ: а) внизъ и в) вверхъ по теченію въ 10 сек., а также скорость сложнаго движенія въ обоихъ случаяхъ.

Отвѣтъ. а) $v = 4{,}5 + 1{,}2 = 5{,}7$ м.; $s = 5{,}7 . 10 = 57$ м.
„ в) $v = 4{,}5 - 1{,}2 = 3{,}3$ м.; $s = 3{,}3 . 10 = 33$ м.

Примѣръ 2. Сохраняя предыдущія условія, найти абсолютную скорость путешественника, гуляющаго по палубѣ парохода со скоростью 0,4 метра въ 1″, а также абсолютную величину его перемѣщенія въ 10 секундъ, если пароходъ идетъ по теченію, а путешественникъ идетъ прямолинейно: а) отъ кормы къ носу парохода и в) обратно.

Отвѣтъ. а) $v = 6{,}1$ м.; $s = 61$ м. в) $v = 5{,}3$ м.; $s = 53$ м.

§ 47. Если *оба простыя* движенія *равноускоренныя* и направленныя *по одной прямой*, то и *сложное* движеніе также будетъ *равноускоренное*. Въ этомъ сложномъ движеніи проходимое пространство, скорость и ускореніе будутъ соотвѣтственно равны *суммѣ* или *разности* проходимыхъ пространствъ, скоростей и ускореній составляющихъ движеній, смотря по ихъ направленію.

$$s = s' \pm s'' = v_0' t + \frac{a' t^2}{2} \pm \left(v_0'' t + \frac{a'' t^2}{2} \right) \text{ или}$$

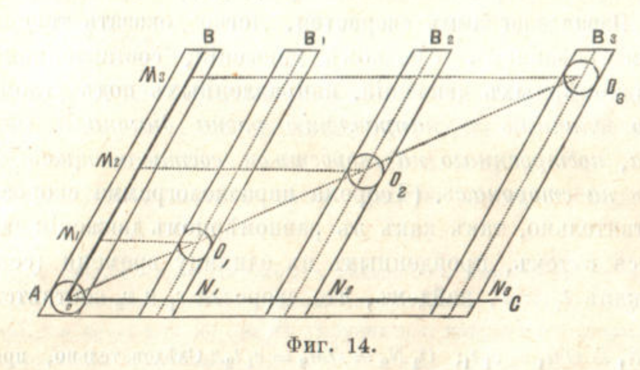
$$s = \left(v_0' \pm v_0'' \right) t + \left(a' \pm a'' \right) \frac{t^2}{2} = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

гдѣ $v_0 = v_0' \pm v_0''$ и $a = a' \pm a''$.

Итакъ, въ сложныхъ движеніяхъ складываются не только пройденныя пространства или перемѣщенія, но также скорости и ускоренія составляющихъ движеній.

§ 48. **Параллелограммъ перемѣщеній.** Обратимся теперь къ разсмотрѣнію сложнаго движенія, составленнаго изъ двухъ простыхъ движеній, направленныхъ подъ угломъ другъ къ другу. Докажемъ, что въ *такомъ сложномъ движеніи перемѣщеніе будетъ также равномѣрное и равное по величинѣ и направленію діагонали параллелограмма, построеннаго на перемѣщеніяхъ составляющихъ движеній, какъ на сторонахъ*. (Теорема параллелограмма перемѣщеній).

Воспользуемся для доказательства уже приведеннымъ примѣромъ. Положимъ, что по лежащему на горизонтальномъ полу жолобу равномѣрно движется по направленію AB шаръ со скоростью v_1, и въ то же самое время самъ жолобъ движется равномѣрно по полу, перемѣщаясь по прямой AC, параллельно самому себѣ (т. е. поступательно) со скоростью v_2. Требуется опредѣлить абсолютное движеніе центра O шара, двигающагося такимъ образомъ равномѣрно и прямолинейно, одновременно по двумъ направленіямъ: по AB со скоростью v_1 и по AC со скоростью v_2. Когда центръ шара черезъ t_1 секундъ послѣ начала движенія пройдетъ по прямой AB жолоба путь $OM_1 = v_1 t_1$, въ это самое время жолобъ, а значитъ и прямая (траекторія) AB перемѣстится по прямой AC на величину $ON_1 = v_2 t_1$ (фиг. 14).



Фиг. 14.

Очевидно, что въ концѣ времени t_1 центръ шара будетъ находиться въ точкѣ O_1, которую найдемъ, проведя изъ точки M_1 прямую M_1O_1, параллельную AC до пересѣченія съ прямою N_1B_1.

Точно также черезъ t_2 секундъ послѣ начала движенія центръ O шара пройдетъ по AB путь $OM_2 = v_1 t_2$, а сама прямая AB пройдетъ путь $ON_2 = v_2 t_2$, вслѣдствіе чего центръ шара перемѣстится въ точку O_2.

Соединимъ точки O_1 и O_2 съ точкой O и докажемъ, что прямыя OO_1 и OO_2 составляютъ одну и ту же прямую.

$\triangle$-къ OO_1N_1 подобенъ $\triangle$-ку OO_2N_2, такъ какъ $\angle N_1 = N_2$ и $\frac{ON_1}{ON_2} = \frac{O_1N_1}{O_2N_2}$ *). Поэтому $\angle O_1ON_1 = \angle O_2ON_2$, а это возможно только тогда, когда прямая OO_1 и OO_2 представляютъ одну и ту же прямую.

Точно также можно доказать, что черезъ t_3 секундъ центръ шара будетъ находиться въ точкѣ O_3, лежащей на той же прямой OO_2 и т. д.

Итакъ, доказано, что центръ шара перемѣщается по прямой OO_3. Но, очевидно, что четыреугольники $OM_1O_1N_1$, $OM_2O_2N_2$, $OM_3O_3N_3 \ldots$, противоположныя стороны которыхъ параллельны, суть параллелограммы, а прямыя OO_1, OO_2, OO_3, —діагонали ихъ.

Наконецъ, изъ подобія тѣхъ же $\triangle\triangle$-въ OO_1N_1 и OO_2N_2 находимъ, что $\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{ON_1}{ON_2} = \frac{v_2 t_1}{v_2 t_2} = \frac{t_1}{t_2}$, т. е. что пути, пройденные точкой O въ сложномъ движеніи, пропорціональны временамъ, изъ чего слѣдуетъ, что это движеніе равномѣрное. Такимъ образомъ теорема параллелограмма перемѣщеній доказана.

§ 49. **Параллелограммъ скоростей.** Легко доказать теперь, что въ разсматриваемомъ сложномъ движеніи, составленномъ изъ двухъ равномѣрныхъ движеній, направленныхъ подъ угломъ, *скорость по величинѣ и направленію равна діагонали параллелограмма, построеннаго на скоростяхъ составляющихъ движеній, какъ на сторонахъ.* (Теорема параллелограмма скоростей).

Дѣйствительно, такъ какъ въ равномѣрномъ движеніи скорость измѣряется путемъ, пройденнымъ въ единицу времени (секунду), то, положивъ $t_1 = 1$, найдемъ, что скорости v_1 и v_2 соотвѣтственно

---

*) $O_1N_1 = OM_1 = v_1 t_1$; $O_2N_2 = OM_2 = v_1 t_2$. Слѣдовательно, пропорцію $\frac{ON_1}{ON_2} = \frac{O_1N_1}{O_2N_2}$ можно представить въ видѣ очевиднаго равенства $\frac{v_2}{v_2}\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_1}{v_1}\frac{t_1}{t_2}$ или $\frac{t_1}{t_2} = \frac{t_1}{t_2}$.

изображаются отрѣзками OM_1 и ON_1, а составная скорость v сложнаго движенія изображается отрѣзкомъ OO_1, т. е. діагональю параллелограмма $OM_1O_1N_1$, стороны котораго изображаютъ скорости v_1 и v_2, что и слѣдовало доказать.

§ 50. **Параллелограммъ ускореній.** Точно также не трудно доказать совершенно подобнымъ же образомъ, что движеніе, сложное изъ двухъ составляющихъ равноускоренныхъ безъ начальной скорости движеній *), есть также движеніе равноускоренное безъ начальной скорости и что *ускореніе его равно по направленію и величинѣ діагонали параллелограмма, построеннаго на ускореніяхъ составляющихъ движеній, какъ на сторонахъ*. (Теорема параллелограмма ускореній).

Воспользуемся для доказательства предыдущимъ примѣромъ, предположивъ только, что какъ движеніе центра шара по жолобу, такъ и движеніе жолоба по полу будутъ равноускоренныя съ ускореніями a_1 и a_2, но безъ начальной скорости.

Когда центръ O шара (фиг. 14) черезъ t_1 секундъ послѣ начала движенія пройдетъ по прямой AB путь $OM_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2}$, въ это же время прямая AB перемѣстится по AC на величину $ON_1 = \frac{a_2 t_1^2}{2}$ и, слѣдовательно, дѣйствительное положеніе центра шара будетъ въ точкѣ O_2. Точно также черезъ t_2 секундъ послѣ начала движенія точка O пройдетъ по AB путь $OM_2 = \frac{a_1 t_2^2}{2}$, а въ то же время прямая AC пройдетъ путь $ON_2 = \frac{a_2 t_2^2}{2}$, вслѣдствіе чего дѣйствительное положеніе центра шара будетъ находиться въ точкѣ O_2. Соединивъ точки O_1 и O_2 съ точкой O, докажемъ изъ подобія $\triangle\wedge$-въ OO_1N_1 и OO_2N_2 **), что прямыя OO_1 и OO_2 составляютъ одну прямую и что, слѣдовательно,

---

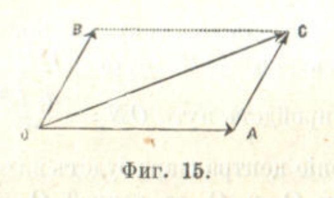
*) Такъ какъ въ прямолинейныхъ движеніяхъ *направленіе движенія* всегда *совпадаетъ съ направленіемъ скорости или ускоренія*, то въ дальнѣйшемъ изложеніи мы для краткости не будетъ упоминать о направленіи движеній, а только о направленіи скоростей.

**) $\angle N_1 = \angle N_2$ и $\frac{ON_1}{ON_2} = \frac{O_1N_1}{O_2N_2}$, такъ какъ эта пропорція, будучи написана въ видѣ $\frac{1/_2\ a_2\ t_1^2}{1/_2\ a_2\ t_2^2} = \frac{1/_2\ a_1\ t_1^2}{1/_2\ a_2\ t_2^2}$ представляетъ тождество $\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$.

сложное (абсолютное) перемѣщеніе центра шара направлено по діагонали параллелограмма, построеннаго на составляющихъ перемѣщеніяхъ, какъ на сторонахъ.

Изъ подобія тѣхъ-же △△-въ имѣемъ, что $\frac{OO_1}{OO_2}=\frac{ON_1}{ON_2}=\frac{t_1^2}{t_2^2}$, т. е. что сложное движеніе есть также равноускоренное безъ начальной скорости, такъ какъ пройденные пути пропорціональны квадратамъ соотвѣтствующихъ временъ. Наконецъ, положивъ $t_1=\sqrt{2}=1{,}41\ldots$ сек., найдемъ, что $OM_1=\frac{a_1(\sqrt{2})^2}{2}=a_1$ и $ON_1=\frac{a_2(\sqrt{2})^2}{2}=a_2$, а діагональ параллелограмма $OM_1O_1N_1$ прямая $OO_1=\frac{a(\sqrt{2})^2}{2}=a=$ ускоренію сложнаго движенія, что и слѣдовало доказать.

§ 51. **Треугольники перемѣщеній, скоростей и ускореній. Понятіе о геометрическомъ сложеніи.** Слѣдуетъ замѣтить, что для опредѣленія въ сложномъ движеніи перемѣщенія, скорости и ускоренія движущейся точки нѣтъ необходимости строить полный параллелограммъ. Именно, вполнѣ достаточно изъ конца A (фиг. 15) прямолинейнаго отрѣзка OA, изображающаго величину и направленіе перемѣщенія (скорости или ускоренія) точки въ одномъ изъ составляющихъ движеній, провести прямую AC, равную и параллельную прямой OB, изображающей величину и направленіе перемѣщенія (скорости или ускоренія) въ другомъ изъ составляющихъ движеній, и точку C соединить прямою съ точкой O. Прямая OC называется *замыкающей* стороною △-ка OAC, такъ какъ стороны OA и AC въ немъ идутъ по *одному* направленію (теченію), какъ указываютъ стрѣлки, а сторона OC по *встрѣчному* направленію. Замыкающая сторона OC, какъ видно изъчертежа, есть ничто иное, какъ діагональ параллелограмма $OABC$, а потому, согласно предыдущему, представляетъ, какъ по величинѣ, такъ и по направленію, перемѣщеніе (скорость или ускореніе) въ сложномъ движеніи точки.



Фиг. 15.

Треугольникъ OAC называется *треугольникомъ перемѣщеній (скоростей или ускореній).*

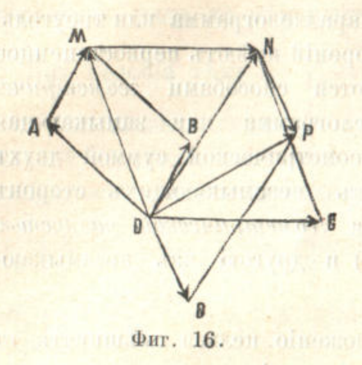
Описанные способы построенія параллелограмма или треугольника перемѣщеній, скоростей и ускореній имѣютъ первостепенное значеніе въ механикѣ и называются способами *геометрическаго сложенія.* Діагональ параллелограмма или замыкающая сторона треугольника называются геометрической суммой двухъ другихъ отрѣзковъ, а каждая изъ незамыкающихъ сторонъ (напр. OA) треугольника называется *геометрической разностью* между замыкающею стороною (OC) и другою изъ незамыкающихъ сторонъ (AC).

Очевидно, что геометрическое сложеніе нельзя смѣшивать съ алгебраическимъ сложеніемъ. Оба сложенія даютъ одинаковые результаты лишь въ томъ случаѣ, если перемѣщенія, скорости или ускоренія направлены по *одной прямой.* Въ этомъ случаѣ параллелограммъ или треугольникъ обращаются въ прямую линію.

§ 52. **Многоугольники перемѣщеній, скоростей и ускореній.** Положимъ, что движущаяся точка одновременно участвуетъ не въ двухъ, а въ нѣсколькихъ равномѣрныхъ или равноускоренныхъ безъ начальной скорости движеніяхъ. Напр., точка O (фиг. 16) въ нѣкоторое время t проходитъ путь OA и въ то же самое время прямая OA проходитъ (перемѣщаясь параллельно самой себѣ) путь OB, прямая OB проходитъ путь OC и прямая OC проходитъ путь OD. Всѣ эти движенія или равномѣрныя (хотя и съ различными скоростями) или равноускоренныя, безъ начальной скорости (но съ различными ускореніями). Такимъ образомъ, истинное или абсолютное движеніе точки O будетъ составное изъ четырехъ движеній. Требуется опредѣлить истинное перемѣщеніе точки во время t, а также скорость (или ускореніе) сложнаго движенія ея.

Для этого поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Сложивъ по правилу параллелограмма перемѣщенія OA и OB, получимъ составное изъ нихъ перемѣщеніе OM; сложивъ его съ третьимъ перемѣщеніемъ OC, найдемъ перемѣщеніе ON, составное изъ перемѣщеній OA, OB и OC; наконецъ, сложивъ перемѣщеніе ON съ послѣднимъ простымъ перемѣщеніемъ OD, получимъ искомое перемѣщеніе OP сложнаго движенія точки O.

Такъ какъ противоположныя стороны параллелограмма равны и параллельны, то легко замѣтить, что прямую OP, выражающую по величинѣ и направленію перемѣщеніе сложнаго движенія, можно найти еще слѣдующимъ построеніемъ. Изъ конца A прямой OA проведемъ прямую AM, равную и параллельную прямой OB, выражающей величину и направленіе второго перемѣщенія; изъ точки M проведемъ прямую MN, равную и параллельную прямой OC третьяго перемѣщенія; наконецъ изъ точки N проведемъ прямую NP, равную и параллельную прямой OD четвертаго перемѣщенія. Соединивъ прямою точки O и P, получимъ искомую прямую OP.



Фиг. 16.

Изъ приведеннаго построенія видно, что перемѣщенія составляющихъ движеній вмѣстѣ съ перемѣщеніемъ составного движенія образуютъ многоугольникъ $OAMNP$, называемый *многоугольникомъ перемѣщеній*.

Точно такое же построеніе употребляется для графическаго опредѣленія скорости или ускоренія сложнаго движенія, составленнаго изъ нѣсколькихъ равномѣрныхъ или равноускоренныхъ, безъ начальной скорости движеній. Разница состоитъ только въ томъ, что въ этихъ случаяхъ стороны многоугольниковъ суть прямыя, выражающія по величинѣ и направленію скорости или ускоренія составляющихъ и составного движеній. Такіе многоугольники называются *многоугольниками скоростей и ускореній*.

Разсматривая многоугольники перемѣщеній, скоростей и ускореній, мы замѣчаемъ, что перемѣщеніе, скорость и ускореніе сложнаго движенія образуютъ въ нихъ послѣднюю, или *замыкающую* сторону, названную такъ потому, что перемѣщенія, скорости и ускоренія простыхъ движеній идутъ по *одному* направленію (или теченію), а перемѣщеніе, скорость и ускореніе сложнаго движенія идетъ по *встрѣчному* направленію.

Отсюда понятно, что если при построеніи этихъ многоугольниковъ стороны ихъ, идущія по *одному* теченію, *замкнутся сами*

собой, т.-е. если конецъ послѣдней изъ такихъ сторонъ совпадетъ съ началомъ первой стороны, то

1. *въ случаѣ многоугольника перемѣщеній*: перемѣщеніе сложнаго движенія равно нулю, т.-е. *точка остается въ покоѣ*;

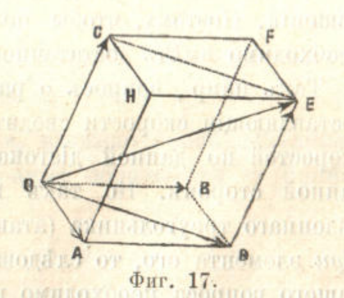
2. *въ случаѣ многоугольника скоростей*: скорость сложнаго движенія равна нулю, т.-е. *точка также остается въ покоѣ*;

3. *въ случаѣ многоугольника ускореній*: ускореніе сложнаго движенія равно нулю, т.-е. *точка или остается въ покоѣ, или движется прямолинейно и равномѣрно.*

Въ заключеніе замѣтимъ, что при построеніи многоугольника перемѣщеній, мы всегда получимъ одну и ту же прямую OP составного перемѣщенія, *въ какомъ бы порядкѣ мы ни откладывали стороны многоугольника.* Видъ многоугольника будетъ другой, но замыкающая сторона его будетъ та же самая прямая OP, что не трудно провѣрить. Понятно, что это замѣчаніе относится также къ многоугольникамъ скоростей и ускореній.

§ 53. **Параллелепипеды перемѣщеній, скоростей и ускореній.** Хотя правило многоугольника перемѣщеній представляетъ самое общее правило сложенія перемѣщеній и одинаково справедливо, будутъ ли направленія ихъ лежать *въ одной плоскости* или *въ разныхъ плоскостяхъ*, однако для частнаго случая сложенія трехъ перемѣщеній, происходящихъ не въ одной плоскости, пользуются еще такъ называемымъ *правиломъ параллелепипеда перемѣщеній.*

Положимъ (фиг. 17), что въ теченіе нѣкотораго времени t точка O проходитъ путь OA, причемъ одновременно съ этимъ движеніемъ прямая OA перемѣщается параллельно самой себѣ на величину OB, а плоскость $OADB$ перемѣщается параллельно самой себѣ на величину OC. Такимъ образомъ точка O одновременно участвуетъ въ трехъ перемѣщеніяхъ OA, OB и OC, не лежащихъ въ одной плоскости. Чтобы найти абсолютное перемѣщеніе ея, сложимъ по правилу параллелограмма перемѣщенія OA и OB и, получивъ составное перемѣщеніе OD, сложимъ его съ третьимъ перемѣщеніемъ OC. Полученное перемѣщеніе OE и будетъ иско-



Фиг. 17.

мымъ абсолютнымъ перемѣщеніемъ точки O. Какъ видно изъ чертежа, перемѣщеніе OE есть ничто иное, какъ *діагональ параллелепипеда*, ребра котораго суть перемѣщенія составляющихъ движеній. Такой параллелепипедъ называется *параллелепипедомъ перемѣщеній*.

Перемѣщеніе OE можно было бы найти и по правилу многоугольника, проведя изъ конца A перваго перемѣщенія прямую AD, равную и параллельную величинѣ второго перемѣщенія OB, затѣмъ изъ точки D проведя прямую DE, равную и параллельную прямой OC третьяго перемѣщенія, и наконецъ соединивъ точки O и E прямою OE, которая и будетъ замыкающей стороной косого многоугольника $OADE$. Совершенно такимъ же образомъ при сложеніи трехъ скоростей и ускореній, не лежащихъ въ одной плоскости, получаются *параллелепипеды скоростей и ускореній*.

Если составляющія движенія взаимно-перпендикулярны, то параллелепипедъ будетъ прямоугольный. Очень важно замѣтить, что въ этомъ случаѣ *составляющія перемѣщенія* (скорости и ускоренія) будутъ представлять *проекціи составного перемѣщенія*, (скорости или ускоренія) на три координатныя оси, направленныя по ребрамъ параллелепипеда.

§ 54. **Разложеніе перемѣщеній, скоростей и ускореній.** Обратный вопросъ, т. е. *разложеніе* даннаго составнаго перемѣщенія, а также составной скорости и составного ускоренія на составляющія перемѣщенія, скорости и ускоренія представляетъ, вообще говоря, неопредѣленную задачу, допускающую безчисленное множество рѣшеній. Поэтому, чтобы получить одно опредѣленное рѣшеніе, необходимо имѣть достаточное число дополнительныхъ данныхъ.

Такъ напр., вопросъ о разложеніи составной скорости на *двѣ* составляющія скорости сводится къ построенію параллелограмма скоростей по данной діагонали или треугольника скоростей по данной сторонѣ. Но такъ какъ для построенія одного опредѣленнаго треугольника (атакже и параллелограмма) надо знать *три* элемента его, то слѣдовательно, для опредѣленнаго рѣшенія нашего вопроса необходимо имѣть еще двѣ данныя величины: или величины, или направленія составляющихъ скоростей, или величину и направленіе одной изъ нихъ (т. е. двѣ стороны, или два угла треугольника скоростей, или одну сторону и одинъ уголъ его) и т. д.

Чтобы разложить составную скорость на *три* составляющія скорости, не лежащія въ одной плоскости, надо построить или параллелепипедъ скоростей по данной діагонали, или четыреугольникъ скоростей по данной сторонѣ. Для опредѣленнаго рѣшенія этого вопроса надо имѣть еще *три* данныя величины. Чаще всего за эти данныя принимаютъ направленія, образуемыя тремя составляющими скоростями съ составной скоростью, т. е. три угла, образуемые ребрами параллелепипеда съ его діагональю.

Очевидно, что всѣ эти вопросы имѣютъ чисто геометрическій характеръ.

§ 55. **Аналитическое опредѣленіе скорости сложнаго движенія, составленнаго изъ двухъ движеній.** Способъ параллелограмма скоростей даетъ возможность легко опредѣлить вычисленіемъ (т.-е. аналитически) величину и направленіе составной скорости V, если извѣстны величины v_1 и v_2 двухъ составляющихъ скоростей и уголъ α между ихъ направленіями.

Фиг. 18.

Дѣйствительно, изъ $\triangle$-ка OBC (фиг. 18) мы имѣемъ

$$V^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2\, v_1 v_2 \cos OBC$$

или, такъ какъ $\cos OBC = \cos\,(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$,

$$V^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2\, v_1 v_2 \cos\alpha \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(1)$$

Углы α_1 и α_2, образуемые направленіями скоростей v_1 и v_2 со скоростью V, опредѣляются изъ того же $\triangle$-ка:

$$V : v_1 : v_2 = \sin\,(180^0 - \alpha) : \sin\,\alpha_2 : \sin\,\alpha_1$$

или

$$V : v_1 : v_2 = \sin\alpha : \sin\alpha_2 : \sin\alpha_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(2)$$

Если составляющія скорости v_1 и v_2 взаимно перпендикулярны ($\alpha = 90^0$; $\cos\alpha = 0$), то параллелограммъ обращается въ прямоугольникъ, при чемъ

$$V = \sqrt{v_1^2 + v_2^2};\quad v_1 = V\cos\alpha;\quad v_2 = V\sin\alpha \;.\;.\;. \;(3)$$

Задача. Опредѣлить V, если 1) $\alpha = 0^0$; 2) $\alpha = 180^0$; 3) $v_1 = v_2$.

Примѣръ. Пароходъ переплываетъ рѣку подъ угломъ $\alpha = 113^0$ къ направленію теченія. Собственная скорость парохода $v_1 = 2{,}4$ м., а скорость теченія

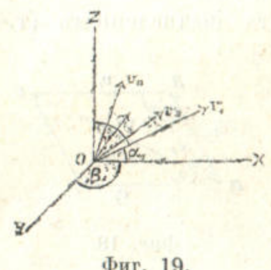
рѣки $v_2 = 0{,}7$ м. Опредѣлить истинную скорость парохода и направленіе ея къ теченію рѣки.

Истинная скорость

$$V = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2\, v_1 v_2 \cos\alpha} = \sqrt{2{,}4^2 + 0{,}7^2 + 2.2{,}4.0{,}7.\cos 113^0} =$$
$$= \sqrt{5{,}76 + 0{,}49 - 3{,}36.0{,}39} = 2{,}23 \text{ м.}$$

Величина угла α_2, образуемаго направленіями истинной скорости и скорости теченія рѣки, опредѣлится изъ пропорціи $V : v_1 = \sin\alpha : \sin\alpha_2$ или $2{,}23 : 2{,}4 = \sin 113^0 : \sin\alpha_2$, откуда $\sin\alpha_2 = \dfrac{2{,}4.\sin 113^0}{2{,}23} = \dfrac{2{,}4.0{,}92}{2{,}23} = 0{,}9901$ или $\alpha = 82^0$ (прибл.).

§ 56. Аналитическое опредѣленіе скорости сложнаго движенія, составленнаго изъ нѣсколькихъ движеній. Положимъ, что точка O участвуетъ одновременно въ нѣсколькихъ движеніяхъ, скорости которыхъ v_1, v_2 $v_3 \ldots v_n$ не лежатъ въ одной плоскости (фиг. 19).



Фиг. 19.

Чтобы найти скорость сложнаго движенія точки, разложимъ каждую изъ этихъ скоростей по правилу параллелепипеда на 3 составляющія по направленію трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей OX, OY и OZ (или, что все равно, спроектируемъ каждую изъ данныхъ скоростей на эти три оси).

Если назовемъ углы, составленные скоростями v_1, v_2, $v_3 \ldots v_n$ съ осью OX черезъ α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots \alpha_n$, съ осью OY черезъ β_1, β_2, $\beta_3 \ldots \beta_n$, съ осью OZ черезъ γ_1, γ_2, $\gamma_3 \ldots \gamma_n$, то слагающія скорости

по оси OX будутъ $v_1 \cos\alpha_1$, $v_2 \cos\alpha_2, \ldots v_n \cos\alpha_n$;
" " OY " $v_1 \cos\beta_1$, $v_2 \cos\beta_2, \ldots v_n \cos\beta_n$;
" " OZ " $v_1 \cos\gamma_1$, $v_2 \cos\gamma_2, \ldots v_n \cos\gamma_n$.

Сложимъ теперь составляющія скорости, идущія по каждой оси. Называя составныя скорости черезъ v_x, v_y и v_z, получимъ (фиг. 20):

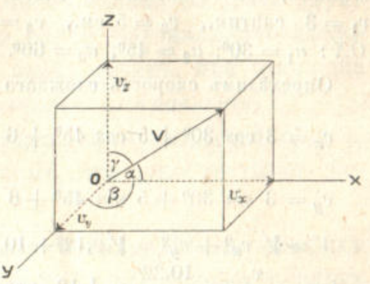
$$v_x = v_1 \cos\alpha_1 + v_2 \cos\alpha_2 + \ldots + v_n \cos\alpha_n = \Sigma_1^n\, v \cos\alpha^{*)}$$
$$v_y = v_1 \cos\beta_1 + v_2 \cos\beta_2 + \ldots + v_n \cos\beta_n = \Sigma_1^n\, v \cos\beta$$
$$v_z = v_1 \cos\gamma_1 + v_2 \cos\gamma_2 + \ldots + v_n \cos\gamma_n = \Sigma_1^n\, v \cos\gamma.$$

---

*) Буква Σ (сигма) часто ставится для сокращеннаго обозначенія суммы членовъ, составленныхъ по одному закону. Значки 1 и n обозначаютъ, что слѣдуетъ взять сумму всѣхъ членовъ отъ 1-го до n-го.

Наконецъ, сложивъ по правилу параллелепипеда составныя скорости v_x, v_y и v_z, получимъ величину искомой скорости сложнаго движенія

$$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad . \quad . \quad (4)$$



Фиг. 20.

Называя углы, составленные направленіемъ сложной скорости V съ осями OX, OY и OZ, черезъ α, β, γ и замѣтивъ, что скорости v_x, v_y и v_z представляютъ не что иное, какъ проекціи на три оси скорости V, будемъ имѣть, что

$$v_x = V \cos \alpha, \quad v_y = V \cos \beta, \quad v_z = V \cos \gamma,$$

откуда

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{V}, \quad \cos \beta = \frac{v_y}{V}, \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Примѣчаніе. Если направленія скоростей $v_1, v_2, v_3 \ldots v_n$ точки O лежатъ въ одной плоскости, то вопросъ о нахожденіи скорости сложнаго движенія значительно упрощается. Возьмемъ въ этой плоскости двѣ оси координатъ OX и OY. Назовемъ углы, образуемые скоростями v_1, v_2, $v_3 \ldots v_n$ съ осью OX черезъ α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots \alpha_n$.

Если каждую изъ скоростей разложимъ на двѣ составляющія по направленію осей OX и OY, слагающія

по оси OX будутъ $v_1 \cos \alpha_1$, $v_2 \cos \alpha_2$, $v_3 \cos \alpha_3, \ldots v_n \cos \alpha_n$.

„ „ OY „ $v_1 \sin \alpha_1$, $v_2 \sin \alpha_2$, $v_3 \sin \alpha_3 \ldots v_n \sin \alpha_n$.

Сложивъ составляющія, идущія по каждой оси, найдемъ двѣ составныя скорости v_x и v_y:

$$v_x = v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2 + \ldots + v_n \cos \alpha_n = \Sigma_1^n \, v \cos \alpha$$

$$v_y = v_1 \sin \alpha_1 + v_2 \sin \alpha_2 + \ldots + v_n \sin \alpha_n = \Sigma_1^n \, v \sin \alpha.$$

Наконецъ сложивъ скорости v_x и v_y, получимъ, что искомая скорость сложнаго движенія $V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Уголъ α, образуемый ею съ осью x, опредѣлится изъ равенствъ $v_x = V \cos \alpha$, $v_y = V \sin \alpha$ или $tg\, \alpha = \frac{v_y}{v_x}$.

Примѣръ. Точка O участвуетъ одновременно въ трехъ равномѣрныхъ движеніяхъ, происходящихъ въ одной плоскости XOY. Скорости этихъ движеній: $v_1 = 3$ сантим., $v_2 = 5$ см., $v_3 = 6$ см., а углы, образуемые ими съ осью OX: $\alpha_1 = 30^0$; $\alpha_2 = 45^0$; $\alpha_3 = 60^0$.

Опредѣлимъ скорость сложнаго движенія по величинѣ и направленію:

$$v_x = 3\cos 30^0 + 5\cos 45^0 + 6\cos 60^0 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{6}{2} = 9{,}12.$$

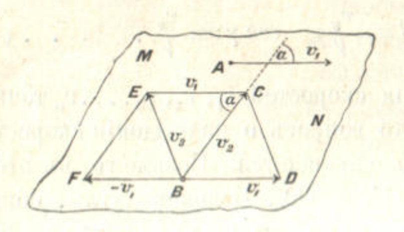
$$v_y = 3\sin 30^0 + 5\sin 45^0 + 6\sin 60^0 = \frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{6\sqrt{3}}{2} = 10{,}22.$$

$$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{9{,}12^2 + 10{,}22^2} = 13{,}7.$$

$$tg\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{10{,}22}{9{,}12} = 1{,}12, \text{ откуда } \alpha = 42^0 15' \text{ (приблиз.)}.$$

Очевидно, что все сказанное о вычисленіи сложной скорости примѣнимо и къ вычисленію сложнаго ускоренія.

§ 57. **Опредѣленіе относительной скорости движенія двухъ точекъ.** На основаніи правилъ сложенія и разложенія скоростей можно рѣшить слѣдующій интересный вопросъ. Извѣстны скорости v_1 и v_2 двухъ двигающихся точекъ (или двухъ поступательно двигающихся тѣлъ) A и B (фиг. 21). Требуется найти по величинѣ и направленію ихъ относительную скорость (т.-е. скорость точки B относительно точки A или наоборотъ)



Фиг. 21.

Разложимъ скорость v_2 точки B на двѣ скорости, изъ которыхъ одна была бы равна скорости v_1 точки A по величинѣ и направленію. Тогда другая слагающая v_3 и будетъ искомой скоростью точки B относительно точки A.

Дѣйствительно, мы всегда можемъ вообразить, что движеніе точки B со скоростью v_2 есть сложное изъ двухъ движеній: одного (переноснаго) со скоростью v_1 той плоскости MN, въ которой лежатъ обѣ точки A и B и другого (относительнаго) со скоростью v_3 по этой плоскости. Очевидно, что только второе движеніе представляетъ движеніе точки B относительно точки A.

Проведемъ изъ точки B прямую BF равную и параллельную скорости v_1 точки A и конецъ F соединимъ съ точкой E. Такъ какъ BF равна и параллельна EC, то и прямая FE также рав-

на и параллельна BC, т.-е. фигура $BFEC$ есть параллелограммъ и $BE = v_3$ — діагональ его. Итакъ относительная скорость двухъ точекъ по величинѣ и направленію равна діагонали параллелограмма, построеннаго на скоростяхъ этихъ точекъ, при чемъ одна изъ скоростей откладывается *въ обратномъ направленіи.*

Если назовемъ уголъ между направленіями скоростей v_1 и v_2 черезъ α, то изъ $\triangle$-ка BCE получимъ, что относительная скорость $v_3 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2 \cos \alpha}$.

Частные случаи. Если направленія обѣихъ дѣйствительныхъ скоростей точекъ параллельны, т.-е. если $\alpha = 0^0$ (скорости идутъ по одному направленію) или, если $\alpha = 180^0$ (скорости идутъ по противоположнымъ направленіямъ), то въ первомъ случаѣ

$$v_3 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2} = v_1 - v_2,$$

а во второмъ случаѣ

$$v_3 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2} = v_1 + v_2.$$

Примѣры. 1. Найти относительную скорость двухъ поѣздовъ, изъ которыхъ одинъ движется со скоростью $v_1 = 40$ верстъ, а другой со скоростью $v_2 = 60$ верстъ въ часъ, если они идутъ: a) по одному направленію; b) по противоположнымъ направленіямъ.

Отвѣтъ. a) 20 верстъ; b) 100 верстъ въ часъ.

2. Въ окно вагона, движущагося со скоростью $v_1 = 15$ м., брошенъ камень со скоростью $v_2 = 18$ м. подъ угломъ $\alpha = 60^0$ къ движенію вагона. Найти направленіе движенія и скорость камня внутри вагона.

Рѣшеніе. Скорость камня внутри вагона $v_3 = \sqrt{15^2 + 18^2 - 2.15.18 \cos 60^0} = 16{,}7$ м. Построивъ чертежъ скоростей, легко увидимъ, что уголъ, образуемый скоростями v_3 и v_1 равенъ $180^0 - x$, гдѣ x — уголъ между скоростью v_3 и скоростью v_1, отложенной въ обратномъ направленіи. Изъ пропорціи $v_2 : v_3 = \sin x : \sin 60^0$ находимъ, что $\sin x = \frac{v_2 \sin 60^0}{v_3} = \frac{18.1{,}73}{2.1{,}67} = 0{,}932$, откуда $x = 69^0$ (прибл.), а искомый уголъ $180^0 - x = 111^0$ (прибл.).

3. Найти выгоднѣйшее положеніе, которое долженъ придать своему зонтику пѣшеходъ, идущій по горизонтальному пути со скоростью $v_1 = 2$ м., если дождь падаетъ вертикально изъ облака, высота котораго надъ землей $= 1000$ м.

Рѣшеніе. Очевидно, что наиболѣе выгодно держать зонтикъ такъ, чтобы ручка его была параллельна направленію относительной скорости дождя. Дѣйствительная скорость дождевыхъ капель близъ земли опредѣлится по формулѣ $v_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2.9{,}8.1000} = \sqrt{19600} = 140$ м. Сложивъ ее по правилу параллелограмма со скоростью $v_1 = 2$ м. пѣшехода, отложенной въ обратномъ направленіи, найдемъ величину и направленіе относительной скорости v_3 дождя. Уголъ этой скорости (а, слѣдовательно, и ручки зонтика) съ горизонтомъ $= 89^0 10'$ (приблиз.).

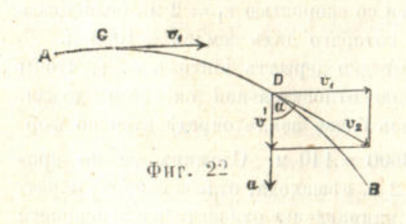
Криволинейныя движенія.

§ 58. Если точка (или тѣло, разсматриваемое какъ точка) движется по нѣкоторой кривой, то такое движеніе называется *криволинейнымъ*. Криволинейное движеніе точки будетъ *равномѣрное*, если въ равные промежутки времени она проходитъ равныя пространства, или *перемѣнное*—въ противномъ случаѣ.

Въ первомъ случаѣ величина скорости точки постоянная, а во второмъ—перемѣнная. Но кромѣ величины скорости во всякомъ криволинейномъ движеніи имѣетъ особое значеніе вопросъ о *направленіи* скорости. Изъ предыдущаго извѣстно, что въ прямолинейныхъ движеніяхъ скорость движущейся точки изображается прямолинейнымъ отрѣзкомъ, длина котораго (въ принятомъ масштабѣ) означаетъ величину, а направленіе опредѣляетъ направленіе скорости, всегда совпадающее съ направленіемъ движенія. Спрашивается, какое же направленіе слѣдуетъ давать этому отрѣзку въ случаѣ криволинейнаго движенія?

Очевидно, во 1-хъ, что въ этомъ случаѣ направленіе скорости должно измѣняться въ каждой точкѣ пути точно такъ же, какъ и направленіе траекторіи, а во-2-хъ, такъ какъ направленіе кривой въ каждой точкѣ опредѣляется направленіемъ касательной къ ней въ этой точкѣ, то, слѣдовательно, направленіе скорости должно всегда совпадать съ направленіемъ касательной къ траекторіи. Такимъ образомъ во всякомъ криволинейномъ движеніи скорость постоянно измѣняется по направленію, а поэтому измѣненіе скорости или *ускореніе* есть всегда величина *перемѣнная*.

Покажемъ, какъ опредѣляется ускореніе перемѣннаго криволинейнаго движенія.

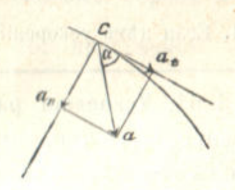


Фиг. 22

§ 59. **Ускореніе.** Положимъ, что точка описываетъ нѣкоторую криволинейную траекторію AB и въ теченіе весьма малаго промежутка времени Δt перемѣщается изъ точки C, гдѣ скорость ея была v_1 въ точку D, въ которой имѣетъ нѣкоторую другую по величинѣ и направленію скорость v_2 (фиг. 22). Разложивъ ско-

рость v_2 по правилу параллелограмма, легко убѣдимся, что она состоитъ изъ прежней скорости v_1 и изъ *вновь пріобрѣтенной* скорости v'. Эта пріобрѣтенная скорость v' и представляетъ собой измѣненіе скорости, происшедшее въ элементъ времени Δt. Раздѣливъ величину v' на Δt, получимъ измѣненіе скорости въ единицу времени, т.-е. *ускореніе* движущейся точки въ моментъ соотвѣтствующій ея положенію въ C *), т.-е. $a = \frac{v'}{\Delta t}$. Изъ чертежа видно, что направленіе ускоренія не совпадаетъ съ направленіемъ касательной къ траекторіи, а обращено внутрь кривой, составляя съ касательной нѣкоторый уголъ α.

§ 60. **Разложеніе ускоренія на касательную и нормаль** **). Итакъ допустимъ, что въ точкѣ C кривой ускореніе движущейся точки $= a$ (фиг. 23). Проведемъ въ этой точкѣ касательную и нормаль къ кривой и разложимъ ускореніе a на два составляющихъ ускоренія по касательной и нормали. Называя черезъ ~~уголъ~~ α уголъ между направленіемъ полнаго ускоренія и касательной, находимъ, что ускореніе по касательной, называемое *касательнымъ ускореніемъ* $a_t = a \cos \alpha$ а ускореніе по нормали или *нормальное ускореніе* $a_n = a \sin \alpha$.



Фиг. 23.

Само собою понятно, что *касательное ускореніе*, всегда совпадающее съ направленіемъ скорости точки въ разсматриваемый моментъ, *выражаетъ измѣненіе скорости по величинѣ, а нормальное ускореніе выражаетъ измѣненіе скорости по направленію.*

---

*) Строго говоря, величина $a = \frac{v'}{\Delta t}$ представляетъ такъ называемое *среднее ускореніе* точки за промежутокъ времени Δt, отнесенное къ единицѣ времени (§ 35). Чтобы найти *истинное ускореніе* ея въ точкѣ C слѣдуетъ найти предѣлъ средняго ускоренія $\frac{v'}{\Delta t}$, при уменьшеніи промежутка времени Δt до нуля (§§ 37 и 38). Очевидно, что наше приближенное опредѣленіе ускоренія будетъ тѣмъ ближе къ истинѣ, чѣмъ менѣе будетъ элементъ времени Δt.

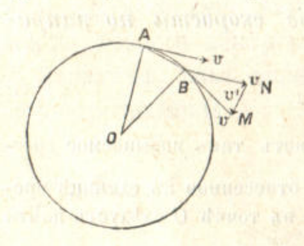
**) Нормалью кривой линіи или поверхности въ данной точкѣ называется перпендикуляръ къ касательной къ этой линіи или поверхности въ той же самой точкѣ.

Принимая это во вниманіе, приходимъ къ слѣдующему раздѣленію движеній въ зависимости отъ ускореній.

Если существуютъ	скорость измѣняется	движеніе.
1. Оба ускоренія a_t и a_n	по величинѣ и направл.	перемѣнное криволинейн.
2. Одно касат. ускор. a_t	только по величинѣ	перемѣнное прямолинейн.
3. Одно норм. ускор. a_n	только по направленію	равномѣрн. криволинейн.
4. Если нѣтъ ускореній	не мѣняется	равномѣрн. прямолинейн.

§ 61. **Ускореніе равномѣрнаго кругового движенія.** Опредѣлимъ ускореніе точки, движущейся равномѣрно по окружности. Въ этомъ случаѣ, какъ извѣстно, существуетъ только одно нормальное ускореніе. Оно направлено всегда по радіусу отъ окружности къ центру, такъ какъ нормаль окружности въ каждой ея точкѣ совпадаетъ съ радіусомъ. Вслѣдствіе этого ускореніе равномѣрнаго кругового движенія обыкновенно называютъ *центростремительнымъ ускореніемъ*.

Итакъ положимъ, что въ нѣкоторый очень малый промежутокъ времени Δt точка прошла по окружности радіуса r весьма малую дугу AB съ постоянной (по величинѣ) скоростью v. Такимъ образомъ $AB = v \cdot \Delta t$ откуда



Фиг. 24.

$$v = \frac{AB}{\Delta t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Построивъ треугольникъ скоростей (фиг. 24) BMN, получимъ величину пріобрѣтенной скорости $v' = MN$. Изъ подобія равнобедренныхъ $\triangle$-въ OAB и BMN имѣемъ, что

$$\frac{MN}{AB} = \frac{BM}{OA} \text{ откуда } MN = \frac{BM}{OA} \cdot AB \text{ или}$$

$$v' = \frac{v}{r} \cdot AB \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Искомое центростремительное ускореніе $a_n = \frac{v'}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot \frac{AB}{\Delta t}$ или, принимая, по малости дуги AB, величину ея равной хордѣ AB и подставляя изъ (1) вмѣсто $\frac{AB}{\Delta t}$ ея значеніе, окончательно получимъ

$$a_n = \frac{v^2}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)\ ^*)$$

т.-е. *центростремительное ускореніе равном. кругового движенія есть постоянная величина, равная отношенію квадрата скорости къ радіусу.*

Этой весьма важной величинѣ даютъ еще слѣдующее выраженіе. Если время одного полнаго оборота точки назовемъ черезъ T и замѣтимъ, что $vT = 2\pi r$, откуда $v = \frac{2\pi r}{T}$, то, подставивъ это выраженіе въ (3), найдемъ, что

$$a_n = \frac{4\pi^2}{T^2} r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Примѣръ. Найти центростремительное ускореніе точки, которая, двигаясь равномѣрно по окружности радіуса 6 метр., дѣлаетъ полный оборотъ въ 8 секундъ.

Рѣшеніе. Скорость точки $v = \frac{2\pi . 6}{8} = \frac{3\pi}{2} = 4{,}71$ м., а ускореніе $a = \frac{v^2}{r} = \frac{(4{,}71)^2}{6} = 3{,}7$ м. Въ теченіе каждой секунды уклоненіе точки отъ прямолинейнаго движенія (по касательной) къ центру $s = \frac{a}{2} = 1{,}85$ м.

§ 62. **Центростремительное ускореніе произвольнаго криволинейнаго движенія.** Выраженіе $\frac{v^2}{r}$ величины центростремительнаго ускоренія можно обобщить на случай какого угодно криволинейнаго движенія. Всякую кривую можно считать состоящей изъ дугъ

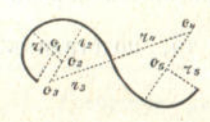
---

*) Выраженіе ускоренія $a_n = \frac{v^2}{r}$ совершенно точно, такъ какъ предѣлъ средняго ускоренія $\frac{v'}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot$ пред. $\left(\frac{AB}{\Delta t}\right)$. Но предѣлъ $\left(\frac{AB}{\Delta t}\right) = v$, т.-е. предѣлъ пройденнаго пространства къ соотвѣтствующему промежутку времени есть скорость. Поэтому $a_n =$ пред. $\left(\frac{v'}{\Delta t}\right) = \frac{v^2}{r}$.

круга, описанныхъ различными радіусами и изъ различныхъ центровъ. Эти радіусы для элементовъ кривой, совпадающихъ съ дугами ихъ круговъ, называются *радіусами кривизны*.

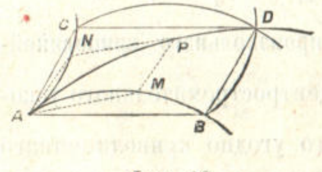
Понятно, что кривая будетъ тѣмъ круче, чѣмъ радіусъ кривизны ея меньше и тѣмъ положе, чѣмъ радіусъ кривизны ея больше. Поэтому за мѣру кривизны окружности принимаютъ дробь $\frac{1}{r}$, т.-е. простѣйшую величину, обратно пропорціональную ея радіусу.

Очевидно, что для различныхъ элементарныхъ дугъ всякой другой кривой величина $\frac{1}{r}$ будетъ перемѣнная (фиг. 25). Слѣдовательно можно сказать, что во всякомъ криволинейномъ движеніи центростремительное ускореніе *въ данный моментъ времени* или, что все равно, въ данной точкѣ пути, равно квадрату скорости въ этотъ моментъ, раздѣленному на соотвѣтствующій радіусъ кривизны, т.-е. $a_n = \frac{v^2}{r}$, при чемъ здѣсь величина a_n уже перемѣнная, зависящая въ равномѣрномъ движеніи отъ перемѣнной величины r, а въ перемѣнномъ движеніи еще и отъ перемѣнной величины v.



Фиг. 25.

§ 63. **Сложеніе криволинейныхъ перемѣщеній** производится такъ же, какъ и сложеніе прямолинейныхъ перемѣщеній по правилу параллелограмма.



Фиг. 26.

Для доказательства предположимъ, что движущаяся точка въ нѣкоторый промежутокъ времени t проходитъ криволинейный путь AB и въ то же время сама траекторія, двигаясь поступательно (т.-е. параллельно самой себѣ) проходитъ криволинейный путь AC (фиг. 26). Если бы траекторія была неподвижна, то, спустя время t, наша точка была бы въ B, а если бы точка была неподвижна, а двигалась бы поступательно только траекторія, то точка, спустя то же время, была бы въ C. При одновременномъ существованіи обоихъ движеній наша точка перейдетъ въ D.

Такъ какъ траекторія двигалась поступательно, то, очевидно, что хорда AB параллельна и равна хордѣ CD. Отсюда слѣдуетъ, что и хорда AC параллельна и равна хордѣ BD, т.-е. что четыреугольникъ $ACDB$ есть параллелограммъ и прямая AD діагональ его.

Итакъ, если извѣстны зависимости составляющихъ движеній отъ времени (т.-е., если наприм., извѣстны уравненія составляющихъ движеній), то, строя для отдѣльныхъ моментовъ параллелограммы перемѣщеній (какъ, наприм., построенъ параллелограммъ $AMPN$) мы будемъ каждый разъ знать положеніе точки въ сложномъ перемѣщеніи, а слѣдовательно можемъ начертить и траекторію сложнаго перемѣщенія, которая, вообще говоря, будетъ нѣкоторая кривая.

Очевидно, что все сказанное легко обобщить на случай трехъ и болѣе перемѣщеній, т.-е. доказать теорему о многоугольникѣ криволинейныхъ перемѣщеній.

Сложеніе скоростей и ускореній криволинейныхъ движеній, понятно, производится по тѣмъ же правиламъ, какъ и въ случаѣ прямолинейныхъ движеній.

§ 64. **Общій случай сложенія равномѣрныхъ и равно-перемѣнныхъ движеній.** Въ предыдущемъ было найдено, что всякое движеніе, составное изъ *прямолинейныхъ* движеній равномѣрныхъ или равноускоренныхъ безъ начальной скорости будетъ также *прямолинейнымъ*.

Докажемъ теперь, что всякое движеніе, составленное изъ *прямолинейныхъ*, но разнородныхъ движеній, направленныхъ другъ къ другу подъ угломъ, будетъ, вообще говоря, *криволинейное*. Сюда относятся движенія, составленныя изъ равноускоренныхъ движеній съ начальными скоростями, изъ равнозамедленныхъ движеній, изъ равномѣрныхъ и равноускоренныхъ безъ начальной скорости или съ начальной скоростью движеній и вообще движенія, составленныхъ изъ совокупности различныхъ равномѣрныхъ, равноускоренныхъ и равнозамедленныхъ движеній.

Замѣтимъ прежде всего, что всѣ подобныя движенія могутъ быть сведены къ одному общему случаю, а именно, къ сложенію двухъ движеній: одного равномѣрнаго и другого равноускореннаго безъ начальной скорости.

Дѣйствительно, всякое равноускоренное движеніе вида $s=v_0t+\frac{at^2}{2}$ можно разсматривать, какъ состоящее изъ двухъ дви-

женій, идущихъ по одному направленію, т.-е. изъ равномѣрнаго со скоростью v_0 и равноускореннаго безъ начальной скорости съ ускореніемъ a. Точно также всякое равнозамедленное движеніе вида $s = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ можно считать состоящимъ изъ двухъ противоположно направленныхъ движеній: равномѣрнаго со скоростью v_0 и равноускореннаго безъ начальной скорости съ ускореніемъ a.

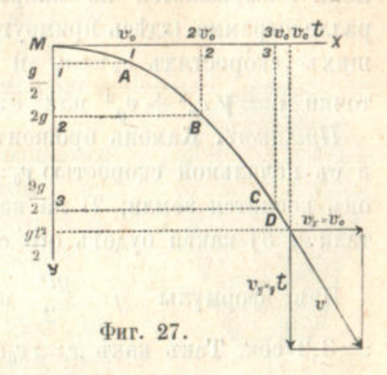
Поэтому, если точка имѣетъ 2 равноускоренныхъ движенія вида $s' = v_0' t + \frac{a' t^2}{2}$ и $s'' = v_0'' t + \frac{a'' t^2}{2}$, то составное движеніе ея можно разсматривать, какъ состоящее изъ одного равномѣрнаго, скорость котораго есть составная изъ начальныхъ скоростей v'_0 и v''_0 и одного равноускореннаго безъ начальной скорости, ускореніе котораго есть составное изъ ускореній a' и a''.

Весьма понятно, что подобнымъ же образомъ можно разсматривать движеніе, составленное изъ двухъ равнозамедленныхъ движеній или изъ движеній равномѣрнаго и равноускореннаго съ начальной скоростью и т. д. Очевидно также, что сложеніе не только двухъ, но и трехъ и болѣе движеній равномѣрныхъ, равноускоренныхъ и равнозамедленныхъ тоже сводится къ сложенію двухъ движеній: *равномѣрнаго*, скорость котораго есть составная изъ всѣхъ начальныхъ скоростей равноперемѣнныхъ движеній и скоростей равномѣрныхъ движеній и *равноускореннаго* безъ начальной скорости, ускореніе котораго есть составное изъ всѣхъ ускореній.

Такимъ образомъ случай сложенія двухъ движеній: равномѣрнаго и равноускореннаго безъ начальной скорости отличается большою общностью. Разсмотримъ его подробно, предположивъ что эти два движенія направлены другъ къ другу подъ прямымъ угломъ. Эта задача имѣетъ и практическое значеніе, а именно представляетъ движеніе тяжелой точки или тѣла, разсматриваемаго какъ точка, брошенныхъ параллельно горизонту. Такъ какъ при рѣшеніи этой задачи не будемъ принимать во вниманіе сопротивленіе воздуха, то, слѣдовательно, будемъ предполагать, что движеніе происходитъ въ безвоздушномъ пространствѣ.

§ 65. **Движеніе тяжелой точки, брошенной параллельно горизонту.** Положимъ, что тяжелая точка (или тѣло) M была брошена параллельно горизонту съ начальной скоростью v_0.

Если бы на эту точку не дѣйствовали затѣмъ никакія силы, то, какъ увидимъ впослѣдствіи, она должна была бы все время двигаться по данному направленію прямолинейно и равномѣрно со скоростью v_0. Но такъ какъ эта точка *тяжелая* (т.-е. на нее дѣйствуетъ сила тяжести), то она должна еще *падать*, т.-е. двигаться по вертикали внизъ равноускоренно съ ускореніемъ $g = 9{,}8$ м. Итакъ точка M имѣетъ два движенія: равномѣрное по горизонтали со скоростью v_0 и равноускоренное безъ начальной скорости съ ускореніемъ g по вертикали (фиг. 27).



Фиг. 27.

Уравненіе перваго движенія:

$$x = v_0 t \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (1)$$

а второго:

$$y = \frac{gt^2}{2} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (2)$$

Построивъ параллелограммы (прямоугольники) перемѣщеній, найдемъ, что точка въ концѣ 1-й, 2-й, 3-ей секунды будетъ последовательно находиться въ A, B, C...,

Исключимъ изъ уравненій (1) и (2) величину t. Такъ какъ

$$t = \frac{x}{v_0}, \text{ то } y = \frac{gx^2}{2\,v_0^{\,2}} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (3)$$

Уравненіе (3), представляющее зависимость между координатами движущейся точки, выражаетъ, очевидно, не что иное какъ *траекторію* разсматриваемато составного движенія. По виду этого уравненія заключаемъ, что траекторія точки есть *парабола*, у которой вершина въ M, а ось совпадаетъ съ вертикалью y.

Итакъ движеніе, составное изъ двухъ прямолинейныхъ движеній: равномѣрнаго и равноускореннаго безъ начальной скорости, есть *криволинейное* и именно *параболическое*, что и слѣдовало доказать *).

---

*) Если бы оба составляющія движенія были направлены не подъ прямымъ, а подъ какимъ угодно острымъ или тупымъ угломъ, то составное или истинное движеніе точки также было бы параболическое. Этотъ болѣе сложный примѣръ мы разсмотримъ впослѣдствіи.

Скорость этого составного движенія въ концѣ промежутка времени t выражается по направленію и величинѣ діагональю параллелограмма (здѣсь прямоугольника), построеннаго на составляющихъ скоростяхъ $v_x = v_0$ и $v_y = gt$. Поэтому истинная скорость точки $v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}$ или $v = \sqrt{v_0{}^2 + g^2t^2}$.

Примѣръ. Камень брошенъ горизонтально съ высоты $y = 50$ м. и съ начальной скоростью $v_0 = 20$ м. Найти: 1) черезъ какое время онъ коснется земли; 2) на какомъ разстояніи, считая по горизонтали и 3) какая будетъ его скорость въ этотъ моментъ.

Изъ формулы $y = \frac{gt^2}{2}$ находимъ $t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{100}{g}} =$ $= 3{,}2$ сек. Такъ какъ $x = v_0 t$, то искомое горизонтальное разстояніе $= 20 . 3{,}2 = 64$ м. Наконецъ изъ формулы $v = \sqrt{v_0{}^2 + g^2t^2}$ получимъ, что скорость камня въ моментъ паденія его на землю $=$ $= \sqrt{20^2 + 9{,}8^2 . 3{,}2^2} = 37{,}2$ м.

Вращательное движеніе твердаго тѣла вокругъ оси.

§ 66. Вращательнымъ движеніемъ твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси называется движеніе, въ которомъ точки тѣла описываютъ около нѣкоторой неподвижной прямой, называемой *осью вращенія*, параллельныя окружности въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ этой оси.

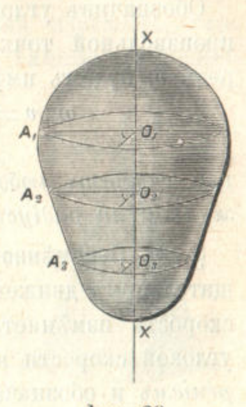
Если тѣло, какъ каждый свой полный оборотъ, такъ и каждую одинаковую часть полнаго оборота совершаетъ въ соотвѣтственно одинаковыя времена, то такое вращеніе называется *равномѣрнымъ*.

Иначе говоря, если во вращающемся тѣлѣ какая-либо точка его, напр. A, въ равные промежутки времени описываетъ равныя дуги, причемъ, очевидно, что и всѣ другія точки описываютъ въ эти промежутки времени также соотвѣтственно равныя дуги, то такое движеніе есть *равномѣрное*, въ противномъ же случаѣ—*перемѣнное*.

Примѣромъ равномѣрнаго вращательнаго движенія можетъ служить вращеніе земли, совершающей въ каждые 24 часа одинъ полный оборотъ вокругъ своей оси.

Такъ какъ разстоянія A_1O_1, A_2O_2, $A_3O_3 \ldots$ точекъ A_1, A_2, $A_3 \ldots$ (фиг. 28) отъ оси суть вмѣстѣ съ тѣмъ и радіусы описы-

ваемыхъ этими точками окружностей или дугъ, то, очевидно, что болѣе удаленныя отъ оси точки тѣла движутся быстрѣе, чѣмъ точки болѣе близкія къ ней, центральные же углы, описываемые радіусами $A_1 O_1$, $A_2 O_2$, $A_3 O_3$.... въ одинаковые промежутки времени, равны между собою.



Фиг. 28.

§ 67. **Скорость равномѣрно-вращающагося тѣла** обыкновенно измѣряется числомъ его оборотовъ (или частей одного полнаго оборота) въ единицу времени, чаще всего *въ одну минуту.*

По данному числу n оборотовъ тѣла въ 1 минуту легко найти скорость любой точки тѣла, т.-е. путь, проходимый ею въ 1 секунду, если только извѣстно разстояніе r этой точки отъ оси вращенія.

Дѣйствительно, путь, проходимый точкой за одинъ оборотъ $= 2\pi r$; слѣдовательно въ 1 минуту или за n оборотовъ пройденный путь $= 2\pi rn$, а въ одну секунду $= \frac{2\pi rn}{60}$.

Итакъ

$$v = \frac{2\pi rn}{60} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Примѣръ. Маховое колесо радіусомъ въ 2 метра дѣлаетъ 40 оборотовъ въ минуту. Какова скорость на окружности маховика. (Скорость на окружности колесъ, шкивовъ и пр. называется часто *окружной скоростью*).

Отвѣтъ.

$$v = \frac{2\pi rn}{60} = \frac{2.3,14.2.40}{60} = 8,37 \text{ м. въ } 1''.$$

Очевидно, что если время одного полнаго оборота тѣла равно T, то скорость точки, находящейся на разстояніи r отъ оси опредѣляется формулой

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

§ 68. **Угловая скорость.** Такъ какъ точки, находящіяся въ различныхъ разстояніяхъ отъ оси, имѣютъ различныя скорости, то для вращательнаго движенія принята еще особая мѣра скорости вращенія, а именно угловая скорость.

Угловой скоростью называется скорость точки, находящейся отъ оси въ разстоянiи равномъ единицѣ длины (1-му сантиметру, 1 метру, 1 футу и пр.).

Обозначивъ угловую скорость буквой ω, а скорость нѣкоторой произвольной точки, находящейся въ разстоянiи r отъ оси черезъ v, будемъ имѣть для времени одного оборота

$$\omega : v = 2\pi : 2\pi r \text{ или } \omega : v = 1 : r, \text{ откуда}$$

$$v = \omega r \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

т.-е. *скорость любой точки тѣла равна угловой скорости, умноженной на радiусъ вращенiя.*

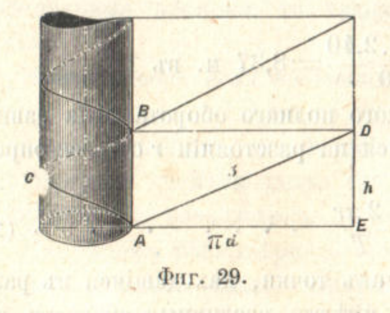
§ 69. **Перемѣнное вращательное движенiе.** Въ перемѣнномъ вращательномъ движенiи угловая (а слѣдовательно, и всякая другая) скорость измѣняется въ каждый моментъ времени. Измѣненiе угловой скорости въ единицу времени называется *угловымъ ускоренiемъ* и обозначается буквой i.

Разсуждая также, какъ и ранѣе при изученiи прямолинейныхъ движенiй, не трудно вывести уравненiя угловой скорости и пройденнаго пространства для равноускореннаго и равнозамедленнаго вращательнаго движенiй. Эти уравненiя

$$\omega = \omega_0 \pm it \quad \ldots \ (4) \quad \text{и} \quad S = \omega_0 t \pm \frac{it^2}{2} \quad \ldots \ (5)$$

только буквами различаются отъ ранѣе выведенныхъ уравненiй, что и понятно, такъ какъ ходъ разсужденiя остался тотъ же самый.

§ 70. **Винтовое движенiе.** Если тѣло имѣетъ одновременно два движенiя: поступательное и вращательное около нѣкоторой оси, то истинное или составное движенiе его будетъ *винтовое*. Если направленiе поступательнаго движенiя параллельно оси (фиг. 29), то точки тѣла будутъ двигаться по цилиндрическимъ поверхностямъ, описаннымъ около этой оси радiусами равными разстоянiямъ точекъ отъ оси. Описываемыя при этомъ точками тѣла траекторiи называются *винтовыми линiями*.



Фиг. 29.

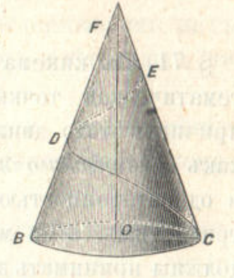
Высота AB поступанiя тѣла за одинъ полный оборотъ называется

шагомъ или *ходомъ* винтовой линіи (или витка), а длина всего пути ACB, пройденнаго при этомъ нѣкоторой произвольной точкой тѣла, называется *длиной витка.*

Развернувъ цилиндрическую поверхность въ плоскость, увидимъ, что длина витка $AD = s$ представляетъ гипотенузу прямоугольнаго Δ-ка, катеты котораго суть: высота шага $DE = h$ и длина окружности основанія цилиндра $AE = 2\pi r$, такъ что $s = \sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2}$.

Скорость описаннаго винтового движенія, какъ составная изъ скоростей v_1 и $v_2 = \omega r$ поступательнаго и вращательнаго движеній, направленныхъ подъ прямымъ угломъ, очевидно $= \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ или

$$v = \sqrt{v_1^2 + \omega^2 r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$



Фиг. 30.

Если поступательное движеніе тѣла направлено по прямой, наклонной къ оси вращенія (фиг. 30), то винтовое движеніе будетъ происходить по конической поверхности. Траекторіи точекъ тѣла въ этомъ случаѣ называются *линіями бурава.*

Введеніе въ статику и динамику.

§ 71. Въ кинематикѣ мы разсматривали движеніе съ чисто математической точки зрѣнія, не обращая никакого вниманія на причины этого движенія, т.-е. на силы. Такое изученіе движенія, какъ *физическаго явленія*, страдало весьма понятной неполнотой и односторонностью: въ механикѣ мы имѣемъ дѣло не съ геометрическимъ, а съ матеріальнымъ тѣломъ, поэтому мы необходимо должны принимать во вниманіе не только величину и форму тѣла, но также и то, что оно состоитъ изъ *вещества* или *матеріи*, такъ какъ въ свойствахъ ея заключаются причины движенія или покоя.

Такимъ образомъ изученіе движенія и покоя тѣлъ не можетъ основываться на одномъ отвлеченномъ математическомъ разсужденіи, но необходимо нуждается въ чисто физическихъ основаніяхъ, открытыхъ путемъ наблюденія и размышленія надъ явленіями природы.

Такихъ основныхъ началъ или, какъ ихъ чаще называютъ, *основныхъ законовъ механики три*:

1. **Законъ инерціи**. *Всякое тѣло стремится сохранить свое состоянія покоя или движенія и не можетъ само по себѣ измѣнить его.*

2. **Законъ независимости дѣйствія силъ.** *Всякая сила, приложенная къ тѣлу, всегда стремится двигать его съ нѣкоторымъ вполнѣ опредѣленнымъ ускореніемъ, независящимъ ни отъ состоянія тѣла, ни отъ дѣйствія на него другихъ силъ.*

3. **Законъ равенства дѣйствія и противодѣйствія.** *Если одно тѣло дѣйствуетъ на другое съ нѣкоторой силой, то въ то же самое время второе тѣло дѣйствуетъ на первое съ такой же точно силой, но дѣйствующей въ обратномъ направленіи.*

Первые два закона были открыты Галилеемъ *), а послѣдній — Ньютономъ.

*) Нѣкоторые авторы неправильно приписываютъ открытіе закона инерціи Кеплеру.

Эти три закона, несмотря на то, что они не имѣютъ очевидности математическихъ аксіомъ и не могутъ быть непосредственно доказаны, тѣмъ не менѣе представляютъ основанія науки о природѣ. Открытіе ихъ составило новую эпоху въ исторіи науки и было ближайшей причиной множества другихъ великихъ завоеваній въ области знаній. Справедливость этихъ основныхъ законовъ доказывается тѣмъ, что до сихъ поръ всѣ выведенныя изъ нихъ слѣдствія блестяще оправдались и, наоборотъ, не наблюдалось ни одного явленія, которое бы имъ противорѣчило.

Однако, прежде чѣмъ перейти къ ближайшему разсмотрѣнію законовъ механики, необходимо уяснить и расширить наши понятія о силахъ, какъ причинахъ движенія.

§ 72. **О силахъ.** Какъ уже мы знаемъ (§ 2), силы происходятъ отъ взаимнаго дѣйствія или одного тѣла на другое, или однѣхъ частицъ тѣла на другія его частицы. О величинѣ силы мы судимъ по дѣйствію, производимому ею на матеріальное тѣло. Это дѣйствіе можетъ быть двоякаго рода: оно можетъ заключаться *въ движеніи*, а также *въ измѣненіи движенія* тѣла или, если движеніе не можетъ произойти вслѣдствіе препятствій, то *въ давленіи на тѣло*. Силы, которыя, при одинаковыхъ условіяхъ дѣйствуя на одно и то же тѣло, сообщаютъ ему одинаковыя движенія или производятъ на него одинаковыя давленія, считаются *равными*.

Силы, во-первыхъ, раздѣляются на *движущія силы*, т.-е. такія, которыя производятъ или стремятся произвести движеніе, и на *сопротивленія*, т.-е. на силы препятствующія движенію, каковы напр., сцѣпленіе частицъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ сила тяжести и проч. Сюда относятся и такъ называемыя *вредныя сопротивленія*: треніе и сопротивленіе среды (воздуха, жидкости), окружающей тѣло.

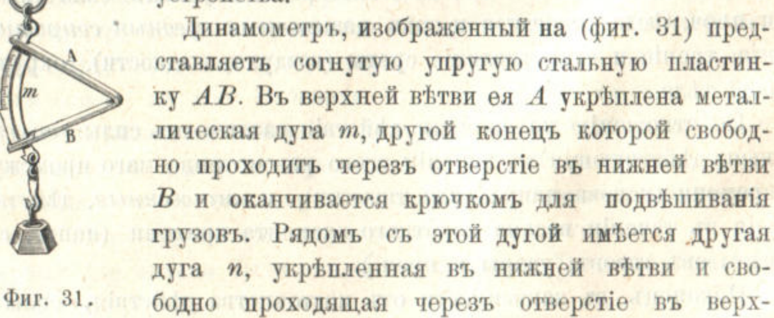
По отношенію ко времени дѣйствія различаютъ силы *непрерывныя*, дѣйствующія въ теченіи всего разсматриваемаго промежутка времени (какова напр., сила тяжести), и *мгновенныя*, дѣйствующія въ теченіи весьма короткаго элемента времени (напр., силы взрывовъ газовъ, удары и проч.).

Наконецъ, въ зависимости отъ постоянства дѣйствія, силы называютъ *постоянными*, если величина и направленіе ихъ не измѣняется съ теченіемъ времени и *перемѣнными* въ противномъ случаѣ.

Строго говоря, мы не знаемъ вполнѣ постоянныхъ силъ. Мускульная сила живыхъ существъ, сила упругости газовъ, сила вѣтра, силы магнитныя и электрическія—все это перемѣнныя силы. Одна изъ наиболѣе постоянныхъ силъ, а именно сила тяжести, выражающаяся вѣсомъ тѣлъ, въ сущности есть также перемѣнная сила, такъ какъ уменьшается при удаленіи тѣла отъ поверхности земли. Тѣмъ не менѣе мы условимся называть постоянными тѣ силы, которыя не измѣняютъ чувствительно своей величины и своего направленія *въ теченіи разсматриваемаго промежутка времени.* Съ этой точки зрѣнія силу тяжести мы будемъ разсматривать какъ постоянную силу.

§ 73. **Единицы силъ.** Простѣйшій, ежедневно наблюдаемый нами случай силы есть *вѣсъ* тѣлъ, представляющій силу земного притяженія, стремящуюся приблизить всѣ тѣла къ центру земли. Поэтому мѣрами или единицами силъ, черезъ сравненіе съ которыми можно было бы измѣрять какія угодно силы, въ механикѣ принимаютъ обыкновенно извѣстныя единицы или мѣры вѣса: *килограммъ* (вѣсъ 1 куб. дециметра воды при 4°C) $= 2{,}5$ фунта $= \frac{1}{16}$ пуда; *граммъ* (вѣсъ 1 куб. сантиметра воды) $= \frac{1}{4}$ золотника; *пудъ* (вѣсъ 1000 куб. дюймовъ воды); фунтъ (вѣсъ 25 куб. дюймовъ воды) и пр. *).

§ 73. **Динамометры.** Для измѣренія силъ существуютъ особые приборы, называемые динамометрами. Существуетъ довольно много динамометровъ различнаго устройства.



Фиг. 31.

Динамометръ, изображенный на (фиг. 31) представляетъ согнутую упругую стальную пластинку AB. Въ верхней вѣтви ея A укрѣплена металлическая дуга m, другой конецъ которой свободно проходитъ черезъ отверстіе въ нижней вѣтви B и оканчивается крючкомъ для подвѣшиванія грузовъ. Рядомъ съ этой дугой имѣется другая дуга n, укрѣпленная въ нижней вѣтви и свободно проходящая черезъ отверстіе въ верх-

*) Въ дальнѣйшемъ мы разсмотримъ еще такъ называемую *абсолютную единицу силы,* употребляющуюся въ точныхъ научныхъ работахъ.

ней вѣтви, гдѣ она кончается кольцомъ для подвѣшиванія самого динамометра. При дѣйствіи силы на крюкъ, пластинка сжимается, причемъ верхній конецъ дуги *n* выходитъ наружу.

По дѣленіямъ этой дуги, нанесеннымъ путемъ опытовъ подвѣшиванія грузовъ при изготовленіи динамометра, опредѣляется величина силы.

Другой примѣръ динамометра представляетъ обыкновенный пружинный безменъ (фиг. 32), устройство котораго ясно видно изъ чертежа.

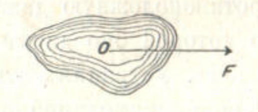
Фиг. 32.

§ 74. **Изображеніе силы.** Графически силу условно изображаютъ въ видѣ прямолинейнаго отрѣзка, причемъ:

1. одинъ изъ концовъ его находится *въ точкѣ приложенія силы*;

2. *направленіе отрѣзка совпадаетъ съ направленіемъ силы*, т.-е. съ тѣмъ направленіемъ, по которому сила двигаетъ или стремится двигать тѣло; при этомъ сторона направленія указывается стрѣлкой;

3. *величина отрѣзка должна соотвѣтствовать величинѣ силы*. Для этого, принимая напр., что длина 1 сантим. соотвѣтствуетъ силѣ въ 1 килограммъ, или длина 1 дюйма соотвѣтствуетъ силѣ въ 1 пудъ, наносятъ въ этомъ масштабѣ на начерченномъ отрѣзкѣ величину силы, считая началомъ точку ея приложенія.



Фиг. 33.

Такимъ образомъ (фиг. 33) отрѣзокъ OF даетъ ясное изображеніе силы въ 2,5 килогр., приложенной къ точкѣ O и дѣйствующей вправо въ указанномъ направленіи.

Основные законы механики.

§ 75. **Законъ инерціи** *). *Всякое тѣло, находящееся въ покоѣ или въ движеніи, стремится сохранить свое состояніе и не мо-*

---

*) Латинское слово *инерція* (inertia) вполнѣ точно переводится русскимъ словомъ *косность*.

жетъ само по себѣ, безъ дѣйствія внѣшнихъ силъ прійти въ движеніе, если оно было въ покоѣ или какъ либо измѣнить свое движеніе (по величинѣ или направленію скорости), если оно двигалось.

Отсюда слѣдуетъ, что пока на тѣло не дѣйствуютъ силы, оно или находится въ покоѣ, или движется прямолинейно и равномѣрно.

Такимъ образомъ законъ инерціи состоитъ изъ двухъ частей: первая изъ нихъ относится къ покою, а вторая—къ движенію тѣлъ.

Первая часть закона очевидна сама по себѣ; вторая не только не очевидна, но и не можетъ быть доказана прямымъ опытомъ. Наоборотъ, наши ежедневные наблюденія и опыты какъ бы противорѣчатъ этому закону.

Такъ напр., мы видимъ, что всякое тѣло, движущееся по горизонтальной плоскости, постепенно уменьшаетъ свою скорость и наконецъ останавливается. Итакъ, какъ будто бы выходитъ, что тѣло само собой измѣняетъ свою скорость и изъ состоянія движенія переходитъ въ состояніе покоя. Если, однако, ближе всмотримся и вдумаемся въ это явленіе, то придемъ къ заключенію, что здѣсь нѣтъ никакого нарушенія закона инерціи. Замедленіе движенія и наконецъ остановка тѣла происходятъ только оттого, что на тѣло дѣйствуютъ двѣ внѣшнія силы въ сторону противоположную движенію, а именно *треніе* тѣла о поверхность, по которой оно движется, и *сопротивленіе воздуха*, разсѣкаемаго тѣломъ. Устранивъ эти оба сопротивленія, мы имѣли бы движеніе вѣчное, прямолинейное и равномѣрное, какъ этого требуетъ законъ инерціи.

Справедливость этого доказывается въ нѣкоторой степени примѣромъ движенія небесныхъ тѣлъ *).

Закономъ инерціи объясняются очень многія интересныя явленія. Человѣкъ, сидящій въ экипажѣ, вагонѣ, лодкѣ, откидывается *назадъ* при началѣ движенія и *впередъ* при внезапной остановкѣ движенія, такъ какъ въ первомъ случаѣ его тѣло стремится со-

---

*) Криволинейность движенія планетъ объясняется тѣмъ, что кромѣ инерціи на нихъ дѣйствуютъ еще внѣшнія силы, изъ которыхъ самая значительная притяженіе къ солнцу, а затѣмъ притяженія другихъ планетъ.

хранитъ состояніе покоя, а во второмъ случаѣ—состояніе движенія.

Выскакивая изъ движущагося экипажа, путешественникъ обладаетъ по инерціи скоростью экипажа, съ которымъ онъ составлялъ какъ бы одно цѣлое, и, не принявъ этого во вниманіе, можетъ легко упасть, такъ какъ эта скорость сложится по правилу параллелограмма со скоростью его скачка и движеніе произойдетъ въ ту сторону, въ которую онъ не разсчитывалъ соскочить.

Точно также всякому извѣстно, что, разбѣжавшись, трудно вдругъ остановиться и т. д.

Инерція есть внутреннее свойство матеріи или вещества. Тѣло обладаетъ тѣмъ бóльшей инерціей, чѣмъ болѣе въ немъ содержится вещества. Извѣстно, что тѣло болѣе тяжелое не такъ скоро прекращаетъ начавшееся движеніе, какъ тѣло болѣе легкое при тѣхъ же самыхъ условіяхъ.

Поэтому законъ инерціи можетъ быть высказанъ еще въ такой формѣ: *матерія сама по себѣ не можетъ измѣнять своего состоянія* *).

§ 76. **Законъ независимости дѣйствія силъ.** *Всякая сила, приложенная къ тѣлу, оказываетъ на него всегда одно и то же дѣйствіе, независимо отъ того, находится ли тѣло въ покоѣ или въ движеніи, а также, дѣйствуютъ ли на него еще и другія силы или нѣтъ.*

Этотъ законъ, какъ и законъ инерціи, состоитъ изъ двухъ частей. Въ первой части говорится о независимости дѣйствія силы отъ состоянія тѣла, во второй - о независимости дѣйствія одной силы отъ дѣйствія другихъ силъ, также приложенныхъ къ тѣлу.

Разсмотримъ сначала первую часть закона. Дѣйствіе нѣкоторой опредѣленной силы на данное тѣло, находящееся въ покоѣ, очевидно, состоитъ въ томъ, что она приводитъ его въ нѣкоторое вполнѣ опредѣленное движеніе **) или, что все равно, *сообщаетъ*

---

*) Замѣтимъ, что съ точки зрѣнія теоретической механики *состояніе тѣла характеризуется исключительно его скоростью.* Такимъ образомъ *покой* есть такое состояніе тѣла, въ которомъ скорость его равна нулю.

**) Необходимо имѣть въ виду, что здѣсь разумѣются совершенно свободныя тѣла, которыя могутъ безпрепятственно перемѣщаться по любому направленію. Если же тѣло не свободно, то сопротивленія его движенію разсматриваются тоже какъ силы. Эти сопротивленія могутъ измѣнить и даже уничтожить дви-

ему нѣкоторое опредѣленное ускоренiе (такъ какъ всякое движенiе вполнѣ характеризуется своимъ ускоренiемъ).

Дѣйствiе той же силы на то же самое тѣло, но уже находящееся въ нѣкоторомъ движенiи, очевидно состоитъ въ опредѣленномъ измѣненiи этого движенiя, т.-е. въ измѣненiи его скорости по величинѣ и направленiю или, иными словами, *въ сообщенiи ему нѣкотораго опредѣленнаго ускоренiя.*

По второму закону ускоренiе, сообщаемое силой двигающемуся тѣлу, совершенно одинаково съ ускоренiемъ, сообщаемымъ ею этому тѣлу въ покоѣ.

Отсюда непосредственно вытекаетъ такое заключенiе: такъ какъ дѣйствiе силы на тѣло сводится исключительно къ производимому ею ускоренiю, то, слѣдовательно, *направленiе силы есть вмѣстѣ съ тѣмъ и направленiе ея ускоренiя.*

Все сказанное вполнѣ подтверждается слѣдующимъ примѣромъ. Дѣйствiе силы тяжести на свободное тѣло, находящееся въ покоѣ или въ какомъ угодно движенiи, всегда одинаково: она сообщаетъ тѣлу всегда одно и тоже ускоренiе $g = 9{,}8$ м., направленное внизъ по вертикали.

Вторая часть разсматриваемаго закона можетъ быть выражена такъ: *если на тѣло дѣйствуетъ не одна, а нѣсколько силъ, то каждая изъ нихъ сообщаетъ тѣлу такое же точно ускоренiе, какъ если бы она дѣйствовала одна.*

Очевидно, что вслѣдствiе этого тѣло получитъ *сложное* движенiе, ускоренiе котораго будетъ составнымъ изъ всѣхъ ускоренiй, сообщаемыхъ ему отдѣльными силами.

На этомъ замѣчательномъ началѣ основаны правила сложенiя силъ, совершенно одинаковыя съ правилами сложенiя скоростей и ускоренiй.

женiе, сообщаемое приложенной силой, такъ что дѣйствiе ея выразится только въ видѣ давленiя на тѣло. Всякое тѣло, покоящееся на нѣкоторой плоскости, представляетъ препятствiя къ своему движенiю по плоскости, вслѣдствiе тренiя и сопротивленiя окружающей среды. Эти сопротивленiя (въ особенности первое) часто могутъ быть такъ велики, что приложенной силы будетъ недостаточно для приведенiя тѣла въ движенiе. Этимъ объясняется, почему, напр., мы можемъ пальцемъ привести въ движенiе свободно висящiй колоколъ и не можемъ сдвинуть его съ мѣста всей рукой, когда онъ стоитъ на землѣ.

Примѣры: 1. Дѣйствіе силы, двигающей шаръ по жолобу съ нѣкоторымъ ускореніемъ a_1, не зависитъ отъ дѣйствія другой силы, двигающей шаръ вмѣстѣ съ жолобомъ съ другимъ ускореніемъ a_2.

2. Положимъ, что шаръ катится съ какой-нибудь скоростью по горизонтальной доскѣ, отстоящей отъ земли на 16 фут.

Когда шаръ достигнетъ края доски, то онъ, описавъ кривую *), упадетъ на землю, какъ оказывается, въ точно такое же время, какъ будто онъ свободно падалъ по вертикали, будучи пущенъ безъ начальной скорости съ той же высоты 16 футовъ, т.-е. во время $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}=\sqrt{\frac{2.16}{32,2}}=$ почти въ 1 секунду.

3. Камень, свободно падающій съ вершины мачты движущагося корабля, всегда падаетъ у подножія мачты.

§ 77. **Законъ равенства дѣйствія и противодѣйствія.** *Если одно тѣло дѣйствуетъ на другое (или если одна частица тѣла дѣйствуетъ на другую) съ нѣкоторой силой, то въ то же самое время второе тѣло дѣйствуетъ на первое съ такой же точно силой, но дѣйствующей въ противоположномъ направленіи.* Иными словами: если первое тѣло притягиваетъ или отталкиваетъ второе тѣло, то второе тѣло съ такой же силой притягиваетъ или отталкиваетъ первое тѣло.

Этотъ законъ обнаруживаетъ *взаимодѣйствіе тѣлъ или частицъ*: дѣйствія тѣлъ или частицъ другъ на друга *взаимны*, такъ какъ они всегда равны и прямопротивоположны.

Тѣла (или частицы) могутъ дѣйствовать другъ на друга тремя способами: *непосредственнымъ прикосновеніемъ*, *при помощи другихъ промежуточныхъ или передаточныхъ тѣлъ* (веревки, ремня, пружины и проч.), и *на разстояніи*, какъ напр., земное притяженіе, магнитныя и электрическія силы. Впрочемъ, въ послѣднемъ случаѣ также предполагается существованіе особой невѣсомой передаточной среды, такъ что выраженіе „*дѣйствіе на разстояніи*“ употребляется какъ для сокращенія рѣчи, такъ и вслѣдствіе недостаточности нашихъ знаній о свойствахъ этой среды.

Законъ равенства дѣйствія и противодѣйствія простирается на всѣ случаи дѣйствія одного тѣла на другое или одной частицы на другую.

---

*) Въ безвоздушномъ пространствѣ—*параболу*.

Примѣры: 1. Если мы давимъ рукой на столъ, то и обратно столъ давитъ на нашу руку съ такой же точно силой.

2. Когда мы тащимъ съ перемѣнной силой при помощи веревки какой-нибудь грузъ, то онъ обратно тянетъ нашу руку во всякій моментъ съ силой, равной нашей силѣ.

3. Съ какой силой магнитъ притягиваетъ къ себѣ кусокъ желѣза, съ такой же точно силой этотъ кусокъ желѣза притягиваетъ къ себѣ магнитъ.

§ 78. **Различіе движеній въ зависимости отъ силъ.** Положимъ, что на находившееся въ покоѣ свободное тѣло, разсматриваемое какъ точка, начала дѣйствовать нѣкоторая постоянная сила F. Вслѣдствіе этого тѣло начнетъ двигаться въ направленіи силы, и въ концѣ первой секунды пріобрѣтетъ нѣкоторую скорость a.

Если бы по истеченіи первой секунды сила F перестала дѣйствовать, то, *по закону инерціи*, тѣло продолжало бы двигаться по тому же направленію прямолинейно и равномѣрно со скоростью a. Но если сила будетъ продолжать дѣйствовать на тѣло, то, *по закону независимости дѣйствія силъ*, она и во вторую секунду сообщитъ тѣлу точно такую же скорость a, такъ что въ концѣ 2-ой секунды тѣло будетъ уже имѣть скорость $a + a = 2a$. Въ теченіе 3-ьей секунды сила сообщитъ тѣлу еще новую скорость a, такъ что въ концѣ 3-ьей секунды скорость тѣла будетъ $2a + a = 3a$. Точно также, въ концѣ 4-ой секунды скорость тѣла будетъ $= 4a$, и вообще въ концѣ t-ой секунды скорость тѣла $= at$.

Итакъ, скорость тѣла въ каждую единицу времени увеличивается на одну и ту же величину a, которая такимъ образомъ представляетъ не что иное какъ постоянное *ускореніе*, т.-е. *свободное тѣло, находившееся въ покоѣ, приходитъ отъ дѣйствія на него постоянной силы въ равномѣрно-ускоренное движеніе.*

§ 79. Допустимъ теперь, что то же самое тѣло равномѣрно двигалось со скоростью v_0 въ тотъ моментъ, когда на него начала дѣйствовать по направленію движенія та же самая постоянная сила F.

По закону независимости дѣйствія силъ, въ концѣ 1-ой секунды скорость тѣла увеличится на прежнюю величину a и будетъ $v_0 + a$, въ концѣ 2-ой секунды скорость будетъ $v_0 + 2a$, въ концѣ 3-ьей секунды $v_0 + 3a$, въ концѣ t-ой секунды $v_0 + at$.

Итакъ, въ этомъ случаѣ движеніе тѣла будетъ также *равномѣрно-ускоренное.* Пространство, пройденное имъ во время t, будетъ $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

Это движеніе, какъ уже указывалось, можно разсматривать во всякій моментъ, какъ состоящее изъ двухъ движеній, происходящихъ по одному направленію: одного равномѣрнаго со скоростью v_0 и другого равноускореннаго съ ускореніемъ a, но безъ начальной скорости, т.-е. вполнѣ тождественнаго съ тѣмъ движеніемъ, которое получило бы то же тѣло, но находившееся въ покоѣ, отъ дѣйствія той же постоянной силы F.

Итакъ, второе движеніе зависитъ исключительно отъ дѣйствія силы F. Первое же движеніе, очевидно, нисколько не зависитъ отъ силы F, такъ какъ оно уже существовало до ея дѣйствія. Отсюда мы должны заключить, что причина этого движенія заключается въ свойствѣ самого тѣла, а именно *въ инерціи* его вещества.

Такимъ образомъ *равномѣрное движеніе происходитъ только отъ инерціи.*

§ 80. Если на наше равномѣрно двигающееся тѣло начнетъ дѣйствовать постоянная сила F въ направленіи, противоположномъ начальной скорости v_0, то въ концѣ 1-ой секунды скорость тѣла уменьшится на величину a и будетъ $v_0 - a$, въ концѣ 2-ой секунды скорость будетъ $v_0 - 2a$, въ концѣ t-ой секунды $v_0 - at$.

Очевидно, что въ этомъ случаѣ *движеніе будетъ равномѣрно-замедленное.* Пространство, пройденное тѣломъ во время t, будетъ $s = v_0 t - \frac{at^2}{2}$.

Легко видѣть, что этотъ случай движенія, уже разсмотрѣнный нами на примѣрѣ вертикальнаго восхожденія тяжелаго тѣла, подтверждаетъ все только что сказанное о вліяніи инерціи и постоянной силы на движеніе тѣлъ.

§ 81. Если на свободное равномѣрно-двигающееся тѣло начнетъ дѣйствовать постоянная сила *подъ нѣкоторымъ угломъ* къ направленію движенія, то тѣло будетъ двигаться *криволинейно*, а именно, описывая нѣкоторую параболу*) и *перемѣнно*, какъ это мы уже видѣли на одномъ частномъ примѣрѣ.

*) Видъ этой параболы, очевидно, зависитъ отъ величины начальной скорости v_0, ускоренія a и угла, образуемаго направленіями скорости v_0 и ускоренія a (или, что все равно, силы F).

Весьма понятно, что если на тѣло будетъ дѣйствовать *перемѣнная* сила, то и движенiе тѣла будетъ *перемѣнное.* При этомъ, если сила будетъ перемѣнная только *по величинѣ*, но постоянная *по направленiю*, то, когда это направленiе *совпадаетъ* съ начальной скоростью тѣла, движенiе будетъ *перемѣнное прямолинейное*, а когда не совпадаетъ, то *перемѣнное криволинейное.*

Сила, *перемѣнная по величинѣ и направленiю*, понятно, производитъ *перемѣнное и криволинейное движенiе.*

§ 82. **Силы пропорцiональны своимъ ускоренiямъ.** Въ предыдущемъ мы видѣли, что постоянная сила F, приложенная къ нѣкоторому свободному тѣлу, сообщаетъ ему во всѣхъ случаяхъ одно и то же ускоренiе a. Предположимъ, что къ этому тѣлу приложена не сила F, а другая постоянная сила F_1, которая въ n разъ болѣе F. Легко доказать, что эта сила сообщитъ нашему тѣлу ускоренiе $a_1 = na$.

Дѣйствительно, силу F_1 мы всегда можемъ представить какъ сумму изъ n силъ равныхъ F. По закону независимость дѣйствiя силъ, каждая изъ этихъ n силъ сообщитъ тѣлу ускоренiе a; слѣдовательно всѣ онѣ вмѣстѣ или, что все равно, одна сила F_1 сообщитъ ускоренiе $= a + a + a .... = na = a_1$.

Итакъ, если одна сила въ n разъ болѣе (или менѣе) другой, то и ускоренiе, сообщаемое одному и тому же тѣлу первой силой, будетъ въ n разъ болѣе (или менѣе) ускоренiя, сообщаемаго второй силой, такъ что $\frac{F_1}{F} = \frac{a_1}{a}$. Если къ одному и тому же тѣлу приложены двѣ силы F_1 и F_2, которыя не содержатся одна въ другой цѣлаго числа разъ, то и въ такомъ случаѣ будемъ имѣть, что $\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1}{a_2}$, гдѣ a_1 и a_2 — ускоренiя, сообщаемыя разсматриваемому тѣлу силами F_1 и F_2.

Въ самомъ дѣлѣ, мы всегда можемъ найти такую третью силу F, которая будетъ *общей мѣрой* для силъ F_1 и F_2, т.-е. будетъ содержаться въ каждой изъ нихъ цѣлое число разъ.

Допустимъ напр., $F_1 = pF$ и $F_2 = qF$, такъ что

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{p}{q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Назовемъ ускоренiе, сообщаемое силой F нашему тѣлу, че-

резъ a. Тогда, по только что доказанному, будемъ имѣть, что $a_1 = pa$ и $a_2 = qa$, откуда

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{p}{q} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Изъ равенствъ (1) и (2) прямо получаемъ, что

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1}{a_2} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

т.-е. *силы пропорціональны ускореніямъ, сообщаемымъ ими одному и тому же тѣлу.*

§ 83. **Зависимость между силой, массой и ускореніемъ.** Равенство (3) можно написать въ такомъ видѣ:

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2}.$$

Очевидно, если возьмемъ третью силу F_3, сообщающую нашему тѣлу ускореніе a_3, то точно также найдемъ, что

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_3}{a_3} \quad \text{или} \quad \frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \dots$$

Отсюда слѣдуетъ, что отношенія силъ къ ускореніямъ, сообщаемымъ ими одному и тому же тѣлу, равны между собою и, значитъ, равны какому-то опредѣленному постоянному числу.

Не трудно найти это число. Для этого достаточно приложить къ нашему тѣлу одну какую-нибудь постоянную силу и точно опредѣлить сообщаемое ею ускореніе.

Но мы уже знаемъ, что постоянная сила тяжести, выражающаяся *вѣсомъ* P тѣла, сообщаетъ ему постоянное ускореніе $g = 9{,}8$ м. Итакъ, раздѣливъ вѣсъ тѣла P на ускореніе g, мы и получимъ искомое число. Обозначимъ его черезъ m и будемъ называть *массою тѣла.*

Очевидно, что $\frac{F}{a} = \frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \dots = \frac{P}{g} = m,$

откуда находимъ:

$$P = mg, \qquad F = ma, \qquad F_1 = ma_1 \dots$$

Уравненіе $m = \frac{F}{a}$ читается такъ: *масса тѣла равна частному отъ дѣленія силы на ускореніе,*

а уравненіе $F = ma$: *сила равна произведенію массы тѣла на ускореніе.*

Уравненіе $F = ma$, устанавливающее зависимость между силою, массою тѣла и ускореніемъ, получаемымъ тѣломъ отъ силы, есть одно изъ важнѣйшихъ уравненій механики.

§ 84. **Масса тѣла и ея измѣреніе.** *Физическое значеніе массы тѣла есть количество вещества, содержащагося въ тѣлѣ.*

Механическое опредѣленіе массы тѣла, какъ частнаго отъ дѣленія силы на сообщаемое ею этому тѣлу ускореніе, какъ скоро увидимъ, вполнѣ согласуется съ ея физическимъ опредѣленіемъ и кромѣ того позволяетъ установить мѣру или *единицу массы*, съ которой можно сравнивать или, что все равно, посредствомъ котораго можно измѣрять массы какихъ угодно тѣлъ.

За единицу массы принимаютъ массу такого тѣла, которому единица силы сообщаетъ ускореніе, равное единицѣ длины.

Найдемъ вѣсъ этого тѣла. Такъ какъ $m = \frac{P}{g}$, то, очевидно, что масса тѣла m будетъ $= 1$, если $\frac{P}{g} = 1$, т.-е. *въ единицѣ массы содержится столько единицъ вѣса, сколько единицъ длины содержится въ ускореніи силы тяжести.*

Такимъ образомъ, принимая за единицу вѣса килограммъ, а за единицу длины метръ, найдемъ, что единица массы вѣситъ 9,8 килограмма, такъ какъ $g = 9{,}8$ метра.

Принимая же за единицы вѣса и длины русскія мѣры: пудъ и футъ, получимъ, что русская единица массы вѣситъ 32,2 пуда.

Выбирая другія единицы длины и вѣса, получимъ другія единицы массы. Напр., взявъ граммъ и сантиметръ, получимъ, что единица массы вѣситъ 980 граммовъ, а принявъ [illegible]ницы длины и вѣса фунтъ и футъ, получимъ, что единица массы вѣситъ 32,2 фунта и т. д.

Задача. Къ свободному тѣлу, вѣсящему 35 килограммовъ и находившемуся въ покоѣ, приложена постоянная сила въ 2 килогр. Найти: 1) ускореніе, сообщенное тѣлу; 2) путь, пройденный имъ въ 3 секунды; 3) скорость въ концѣ 3-ьей секунды.

Рѣшеніе. Изъ уравненія $F = ma$ получимъ, что $a = \frac{F}{m}$.

Найдемъ прежде всего массу даннаго тѣла:

$$m = \frac{P}{g} = \frac{35}{9{,}8} = \frac{25}{7}.$$

Слѣдовательно, ускореніе $a = \frac{2.7}{25} = 0{,}56$ метра.

Такъ какъ движеніе тѣла будетъ равноускоренное, то путь, пройденный имъ въ три секунды, опредѣлится изъ уравненія $s = \frac{at^2}{2}$, т.-е. $s = \frac{0{,}56.9}{2} = 2{,}52$ м.

Скорость въ концѣ 3-ьей секунды $v = at = 0{,}56.3 = 1{,}68$ м.

Примѣчаніе. Опредѣленное такимъ образомъ значеніе единицы массы имѣетъ тотъ недостатокъ, что зависитъ отъ единицы вѣса, которая, какъ извѣстно, не есть постоянная величина. Поэтому въ научныхъ работахъ употребляется часто другая система мѣръ, въ которой за единицу массы принимаютъ массу или количество вещества, заключающагося въ 1 куб. сантиметрѣ чистой воды при 4⁰ С. Эту единицу массы называютъ *граммомъ.* (Не слѣдуетъ смѣшивать граммъ-массу съ граммомъ-вѣсомъ. Граммъ-вѣсъ имѣетъ различное значеніе на различныхъ широтахъ, напр., на полюсѣ и на экваторѣ, между тѣмъ какъ граммъ-масса имѣетъ вездѣ одно и то же значеніе). За единицу силы принимаютъ силу, называемую *диной*, которая сообщаетъ единицѣ массы (грамму) ускореніе въ 1 сантим. въ 1 секунду. Такая система мѣръ называется *абсолютной* или *системой С. G. S*, такъ какъ основаніемъ ей служатъ *три постоянныя величины:* сантиметръ *(С)*, граммъ *(G)* и секунда *(S)*.

§ 85. **Пропорціональность массъ вѣсамъ и объемамъ.** Положимъ, что имѣемъ два тѣла, вѣса которыхъ равны P_1 и P_2. Тогда масса перваго тѣла $m_1 = \frac{P_1}{g}$, а масса второго тѣла $m_2 = \frac{P_2}{g}$, откуда

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{P_1}{P_2},$$

т.-е. *массы тѣлъ пропорціональны ихъ вѣсамъ.*

Если эти тѣла *однородныя*, т.-е. если они состоятъ изъ одного и того же вещества, или если вообще равные объемы ихъ имѣютъ и равные вѣса, то, очевидно, массы такихъ тѣлъ пропорціональны ихъ объемамъ:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{V_1}{V_2}.$$

§ 86. Представимъ, что къ тѣлу массы m_1 приложена сила F_1, а къ тѣлу массы m_2 приложена сила F_2. Тогда первое тѣло получитъ нѣкоторое ускореніе a_1, а второе — ускореніе a_2, при чемъ

$$F_1 = m_1 a_1 \quad \text{и} \quad F_2 = m_2 a_2, \quad \text{или} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 a_1}{m_2 a_2}.$$

Разсмотримъ 3 частные случая этого равенства.

1. *Силы равны:* $F_1 = F_2$. Тогда $\frac{m_1 a_1}{m_2 a_2} = 1$, или $m_1 a_1 = m_2 a_2$, откуда $\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$, т.-е. *равныя силы* (или, что все равно, одно и та же сила) *сообщаютъ тѣламъ ускоренія*, *обратно пропорціональныя ихъ массамъ.*

Очевидно, что если при этомъ окажется, что ускоренія a_1 и a_2 равны, то можемъ заключить, что и массы m_1 и m_2 тѣлъ равны и наоборотъ. Отсюда вытекаетъ такое опредѣленіе равныхъ силъ: *силы равны, если, дѣйствуя на одинаковыя массы, онѣ сообщаютъ имъ одинаковыя ускоренія.*

2. *Массы равны:* $m_1 = m_2$. При этомъ $\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1}{a_2}$, т.-е. если массы тѣлъ равны, то ускоренія пропорціональны силамъ.

3. *Ускоренія равны:* $a_1 = a_2$. Тогда $\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1}{m_2}$, т.-е. если ускоренія равны, то силы пропорціональны массамъ тѣлъ.

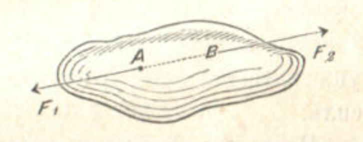
§ 87. Итакъ, если одна и та же сила дѣйствуетъ на различныя тѣла, то *ускоренія*, сообщаемыя силой, *будутъ тѣмъ меньше, чѣмъ массы тѣлъ больше.* Но, по первому закону механики, тѣло сопротивляется измѣненію своего покоя или движенія вслѣдствіе инерціи. Слѣдовательно, чѣмъ болѣе будетъ масса тѣла, тѣмъ болѣе оно будетъ инертно. Инертность же тѣла есть свойство его вещества, откуда слѣдуетъ, что тѣло будетъ тѣмъ болѣе инертно, чѣмъ болѣе въ немъ вещества или матеріи.

Такимъ образомъ по массѣ тѣла мы можемъ судить о количествѣ заключающейся въ немъ матеріи или просто назвать *массой тѣла количество его матеріи или вещества.*

Статика.

§ 88. **Основная теорема.** *Двѣ равныя и прямопротивоположныя силы, приложенныя къ твердому тѣлу, взаимно уравновѣшиваются*, т.-е. тѣло остается въ томъ же состоянiи, въ какомъ оно находилось до начала дѣйствiя этихъ силъ.

Дѣйствительно, единственное дѣйствiе силъ F_1 и F_2 (фиг. 34) состоитъ въ стремленiи измѣнить разстоянiе между частицами A и B тѣла, но такъ какъ въ абсолютно-твердомъ тѣлѣ разстоянiя между частицами неизмѣняемы, то, слѣдовательно, дѣйствiя обѣихъ силъ взаимно уничтожатся и никакого измѣненiя въ состоянiи тѣла не произведутъ.



Фиг. 34.

Справедливость этой теоремы доказывается также и слѣдующимъ образомъ. Двѣ равныя и прямо-противоположныя силы сообщаютъ, по второму закону механики, равныя и прямо-противоположныя ускоренiя, но въ такомъ случаѣ ускоренiе, составное изъ нихъ, равно 0, т.-е. иначе говоря, совокупное дѣйствiе этихъ силъ равно 0-й, слѣдовательно, обѣ силы взаимно уравновѣшиваются. Отсюда слѣдуетъ, что если къ тѣлу приложить или отъ тѣла отнять какое угодно число взаимно-уравновѣшивающихся силъ, то состоянiе его не измѣнится.

Слѣдствiе. *Дѣйствiе силы, приложенной къ твердому тѣлу, не измѣнится, если точку приложенiя ея перенести въ какую угодно другую точку этого тѣла, лежащую на направленiи силы*, или *силу можно перенести по ея направленiю, при чемъ дѣйствiе силы не измѣнится.*

Положимъ, что къ тѣлу въ точкѣ A приложена сила F. Приложимъ къ точкѣ B, лежащей на направленіи AF (фиг. 35), двѣ силы F_1 и F_2, равныя силѣ F и прямо противоположныя, отъ этого состояніе тѣла не измѣнится. Но силы AF и BF_2, какъ равныя и прямопротивоположныя, взаимно уравновѣшиваются и, слѣдовательно, могутъ быть отброшены. Тогда останется одна сила F_1, равная первой силѣ F, но приложенная къ точкѣ B. Такимъ образомъ получилось, что точка приложенія силы F перенесена въ точку B, причемъ никакого измѣненія въ дѣйствіи силы не произошло.



Фиг. 35.

Сложеніе и разложеніе силъ.

§ 89. **Понятіе о равнодѣйствующей.** Вообразимъ, что на нѣкоторое тѣло, находящееся въ покоѣ, дѣйствуютъ n различныхъ силъ F_1, F_2, F_3.... F_{n-1}, F_n. Всѣ эти силы взаимно-уравновѣшиваются, т.-е. дѣйствіе какой-либо одной изъ нихъ, напр., силы F_n, уничтожаетъ или уравновѣшиваетъ дѣйствіе всѣхъ остальныхъ силъ.

Представимъ теперь, что мы отбросили всѣ силы кромѣ F_n, но зато приложили одну новую силу F_n', равную и прямо-противоположную силѣ F_n. Очевидно, что при этомъ тѣло по прежнему будетъ оставаться въ покоѣ.

Итакъ, дѣйствіе $n-1$ силъ F_1, F_2, F_3.... F_{n-1} вполнѣ замѣнилось дѣйствіемъ одной силы F_n'.

Сила, дѣйствіе которой вполнѣ замѣняетъ совокупное дѣйствіе нѣсколькихъ другихъ силъ, называется ихъ *равнодѣйствующей*, а замѣненныя его силы называются ея *составляющими* или *слагающими*.

Точно также, если тѣло не находится въ равновѣсіи, а движется съ нѣкоторымъ ускореніемъ a подъ дѣйствіемъ двухъ или нѣсколькихъ силъ, то мы можемъ вообразить, что совокупное дѣйствіе этихъ силъ можетъ быть замѣнено дѣйствіемъ одной силы, приложенной къ тѣлу въ нѣкоторой точкѣ и сообщающей ему то же самое ускореніе a. Эта послѣдняя сила n будетъ *равнодѣйствующей* приложенныхъ силъ.

Опредѣленіе равнодѣйствующей по даннымъ слагающимъ называется *сложеніемъ силъ*.

Понятно, что возможна и обратная задача: одну данную силу замѣнить нѣсколькими другими силами, совокупное дѣйствіе которыхъ было бы одинаково съ дѣйствіемъ данной силы.

Такая замѣна одной силы нѣсколькими называется *разложеніемъ силы* и представляетъ, вообще говоря, неопредѣленную задачу.

§ 90. Слѣдуетъ замѣтить, что сложеніе и разложеніе силъ, а также равнодѣйствующая сила и ея точка приложенія суть только *воображаемыя понятія*, вводимыя для облегченія и разъясненія нашихъ представленій о дѣйствіи и свойствахъ силъ, а въ особенности для упрощенія рѣшенія основной задачи статики: опредѣленія условій равновѣсія тѣла, находящагося подъ дѣйствіемъ силъ.

Сложеніе силъ не всегда возможно: существуетъ, какъ увидимъ далѣе, нѣсколько случаевъ, въ которыхъ совокупное дѣйствіе двухъ силъ не можетъ быть замѣнено дѣйствіемъ одной силы. Тогда говорятъ, что такія силы не имѣютъ равнодѣйствующей.

§ 91. Силы, приложенныя къ тѣлу, могутъ находиться или въ одной плоскости, или въ различныхъ плоскостяхъ.

Если двѣ силы лежатъ *въ одной плоскости*, то направленія ихъ или 1°, идутъ по одной прямой, или 2°, пересѣкаются между собой, или 3°, параллельны другъ другу.

Если двѣ силы не лежатъ въ одной плоскости, то направленія ихъ представляютъ двѣ пересѣкающіяся и непараллельныя прямыя. Такія прямыя называютъ *перекрещивающимися*.

Сложеніе двухъ силъ въ одну возможно только въ томъ случаѣ, если эти силы лежатъ въ одной плоскости, за исключеніемъ одного частнаго случая, который мы подробно разберемъ впослѣдствіи.

Итакъ, разсмотримъ послѣдовательно три случая сложенія силъ, приложенныхъ къ тѣлу:

1) если силы дѣйствуютъ по направленію одной прямой;

2) если направленія силъ сходятся или пересѣкаются;

3) если направленія силъ параллельны.

Сложеніе силъ, дѣйствующихъ по одному направленію.

§ 92. **Теорема.** *Равнодѣйствующая двухъ силъ, дѣйствующихъ по одному направленію, имѣетъ то же направленіе и равна суммѣ ихъ, если силы дѣйствуютъ въ одну сторону, и равна разности ихъ, если силы дѣйствуютъ въ противоположныя стороны.*

Положимъ, что къ нѣкоторому тѣлу, массу котораго назовемъ черезъ m, приложены двѣ силы P и Q, дѣйствующія по одному направленію и въ одну сторону, причемъ сила P сообщаетъ тѣлу ускореніе a_1, а сила Q — ускореніе a_2.

Перенесемъ точки приложенія силъ въ какую-нибудь одну точку тѣла, лежащую на направленіи силъ. Вслѣдствіе совокупнаго дѣйствія обѣихъ силъ тѣло получитъ составное ускореніе $a = a_1 + a_2$, равное суммѣ ускореній, сообщаемыхъ отдѣльно силами P и Q, но, очевидно, что то же самое ускореніе наше тѣло могло бы получить отъ третьей силы R, приложенной въ той же точкѣ, идущей по тому же направленію и равной суммѣ силъ P и Q, такъ какъ $R = ma = m(a_1 + a_2) = ma_1 + ma_2 = P + Q$. Если силы P и Q дѣйствуютъ по одному направленію, но въ разныя стороны, то составное ускореніе, получаемое тѣломъ отъ совокупнаго дѣйствія обѣихъ силъ, будетъ $a' = a_1 - a_2$ (если $P > Q$). Но, очевидно, что же самое ускореніе тѣло получило бы отъ третьей силы $R' = P - Q$, совпадающей по направленію съ бóльшей силой P, такъ какъ $R' = ma' = m(a_1 - a_2) = ma_1 - ma_2 = P - Q$.

§ 93. Очевидно, что случай сложенія двухъ силъ, идущихъ по одному направленію, легко распространить и на случай сложенія какого угодно числа такихъ же силъ, такъ что можно считать доказанной слѣдующую общую теорему:

Равнодѣйствующая нѣсколькихъ силъ, дѣйствующихъ по одной прямой, равна суммѣ ихъ, если всѣ силы дѣйствуютъ въ одну сторону; въ противномъ же случаѣ, равнодѣйствующая равна избытку суммы силъ, дѣйствующихъ въ одну сторону, надъ суммой силъ, дѣйствующихъ въ противоположную сторону.

Называя силы, дѣйствующія въ одну сторону, *положительными*, а въ противоположную сторону *отрицательными*, можно высказать эту теорему еще въ болѣе общей формѣ:

Равнодѣйствующая нѣсколькихъ силъ, дѣйствующихъ по одной прямой, равна по величинѣ и направленію алгебраической суммѣ всѣхъ этихъ силъ.

Весьма понятно, что эту задачу легко рѣшить и графически т. е. построеніемъ.

Сложеніе сходящихся силъ.

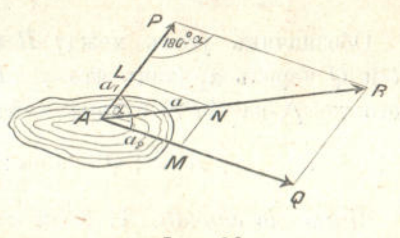
§ 94. **Сходящіяся силы.** Силы называются *сходящимися*, если направленія ихъ пересѣкаются въ одной точкѣ.

Вообразимъ, что къ свободному твердому тѣлу приложено нѣсколько сходящихся силъ.

Если перенесемъ эти силы по ихъ направленію въ общую точку пересѣченія, то получимъ, что *всѣ данныя силы приложены къ одной точкѣ тѣла*. Эти силы могутъ лежать или въ *одной* плоскости, или *въ разныхъ* плоскостяхъ, причемъ, однако, *каждыя двѣ сходящіяся силы*, очевидно, *всегда лежатъ въ одной плоскости*.

Изученіе сложенія сходящихся силъ начнемъ съ простѣйшаго случая, т.-е. съ сложенія двухъ сходящихся силъ.

§ 95. **Параллелограммъ силъ.** Положимъ, что въ точкѣ A свободнаго тѣла приложены двѣ силы P и Q (фиг. 36) и требуется найти ихъ равнодѣйствующую.



Фиг. 36.

Силы P и Q сообщаютъ нашему тѣлу ускоренія $a_1 = \frac{P}{m}$ и $a_2 = \frac{Q}{m}$ (гдѣ m—масса тѣла) по своему направленію. При этомъ тѣло получаетъ составное ускореніе a, равное по величинѣ и направленію діагонали параллелограмма $ALNM$, построеннаго на ускореніяхъ $a_1 = AL$ и $a_2 = AM$, какъ на сторонахъ.

Мы всегда можемъ представить, однако, что это послѣднее ускореніе a сообщаетъ тѣлу нѣкоторая третья сила R, направленіе которой совпадаетъ съ направленіемъ этого ускоренія, а величина равна произведенію изъ ускоренія на массу тѣла, такъ что $R = ma$.

Но, очевидно, что, увеличивъ стороны $AL = a_1$, Q и $AM = a_2$ параллелограмма $ALMN$ въ m разъ, мы получимъ новый параллелограммъ $APRQ$, стороны котораго будутъ по величинѣ и направленію равны даннымъ силамъ $P = ma_1$ и $Q = ma_2$, а діагональ $R = ma$ представитъ по величинѣ и направленію искомую равнодѣйствующую этихъ силъ. Итакъ:

Равнодѣйствующая двухъ силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, равна по величинѣ и направленію діагонали параллелограмма, построеннаго на этихъ силахъ, какъ на сторонахъ.

Это положеніе, одно изъ самыхъ основныхъ положеній механики, называется *параллелограммомъ силъ*.

Чтобы графически опредѣлить числовую величину равнодѣйствующей (напр., въ килограммахъ или пудахъ), достаточно смѣрить длину отрѣзка AR и сравнить ее съ масштабомъ силъ, выбраннымъ для силъ P и Q.

§ 96. **Аналитическое опредѣленіе равнодѣйствующей двухъ сходящихся силъ.** Если уголъ между силами P и Q есть α, то уголъ $APR = 180^\circ - \alpha$, и, слѣдовательно, изъ $\triangle$-ка APR, получимъ, что $R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos(180^\circ - \alpha)$ или $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$, откуда

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Обозначивъ уголъ между R и P черезъ α_1, а уголъ между R и Q черезъ α_2 (такъ что $\angle(R, P) = \alpha_1$; $\angle(R, Q) = \alpha_2$) изъ того же $\triangle$-ка APR будемъ имѣть

$$R : P : Q = \sin\alpha : \sin\alpha_2 : \sin\alpha_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Частные случаи. 1. Если $\alpha = 0^\circ$ или $\alpha = 180^\circ$, то силы P и Q идутъ по одной прямой и *въ первомъ* случаѣ—*въ одну сторону*, причемъ $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ} = P + Q$, а во второмъ случаѣ — въ противоположныя стороны, причемъ *)

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ} = P - Q.$$

(Обобщеніе правила параллелограмма на случай двухъ силъ, идущихъ по одному направленію).

*) Такъ какъ $\cos 0^\circ = 1$ и $\cos 180^\circ = -1$.

2. Если $\alpha = 90^0$, т.-е. силы P и Q взаимно перпендикулярны, то, такъ какъ $\cos 90^0 = 0$:

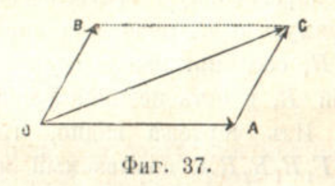
$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad P = R\sin\alpha_2, \quad Q = R\cos\alpha_2 \text{ и } \tan g\alpha_2 = \frac{P}{Q}.$$

3. Если $P = Q$, то $R = \sqrt{2P^2 + 2P^2\cos\alpha} = P\sqrt{2(1+\cos\alpha)} = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$.

Изъ выраженія (1) для равнодѣйствующей видно, что величина ея зависитъ не только отъ величины слагающихъ, но и отъ угла α между ними. Можетъ случиться, что величина равнодѣйствующей будетъ менѣе каждой изъ составляющихъ. но во всякомъ случаѣ R не можетъ быть $> P + Q$ и менѣе $P - Q$.

Задача. Опредѣлить, при какомъ углѣ α, равнодѣйствующая R равна каждой изъ составляющихъ, если $P = Q$.

§ 97. **Треугольникъ силъ.** Легко видѣть, что для графическаго опредѣленія равнодѣйствующей двухъ сходящихся силъ нѣтъ необходимости строить полный параллелограммъ. Для этого достаточно изъ конца одной силы, выражаемой отрѣзкомъ OA (фиг. 37), провести прямую AC, равную и параллельную другой силѣ OB и точку C соединить съ точкой приложенія силъ O. Прямая OC, представляющая *замыкающую* сторону *треугольника силъ* OAC, и есть искомая составляющая.



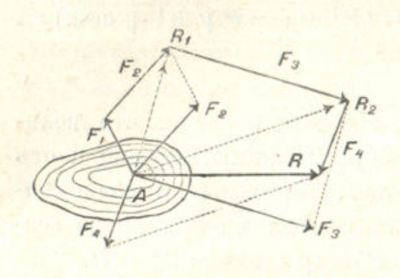
Фиг. 37.

Какъ видно, *сложеніе сходящихся силъ вполнѣ тождественно съ сложеніемъ скоростей или ускореній* (§ 51), *что безъ сомнѣнія и должно было получиться, такъ какъ ускоренія пропорціональны силамъ, совпадаютъ съ ними по направленію и точно также графически изображаются прямолинейными отрѣзками* *).

Построеніе треугольника силъ представитъ такъ называемое геометрическое сложеніе, а поэтому *равнодѣйствующая двухъ сходящихся силъ равна геометрической суммѣ ихъ.*

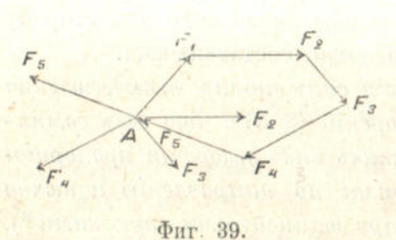
*) Отрѣзки, имѣющіе опредѣленную длину, направленіе и положеніе, которыми въ механикѣ графически изображаются перемѣщенія, скорости, ускоренія и силы, называются *векторами*. Два вектора называются геометрически равными, если они имѣютъ равную длину, параллельны и одинаково направлены. Геометрическое сложеніе и есть сложеніе векторовъ.

§ 98. **Многоугольникъ силъ.** Положимъ, что на точку A тѣла дѣйствуютъ четыре силы F_1, F_2, F_3 и F_4 (фиг. 38). Сложивъ по правилу параллелограмма силы F_1 и F_2, получимъ ихъ равнодѣйствующую R_1. Сложивъ R_1 и силу F_3 найдемъ R_2, равнодѣйствующую трехъ силъ. Наконецъ, сложивъ R_2 и четвертую силу F_4, найдемъ искомую равнодѣйствующую R всѣхъ данныхъ силъ. Но такъ какъ противоположныя стороны параллелограмма равны и параллельны, то равнодѣйствующую сходящихся силъ можно найти также съ помощью слѣдующаго построенія: изъ конца первой силы F_1 проводятъ прямую F_1R_1, равную и параллельную второй силѣ F_2, изъ точки R_1 прямую R_1R_2, равную и параллельную третьей силѣ F_3 и, наконецъ, изъ точки R_2— прямую R_2R, равную и параллельную четвертой силѣ F_4. Прямая AR, соединяющая точку A приложенія силъ съ найденной точкой R, и есть искомая равнодѣйствующая.



Фиг. 38.

Изъ чертежа видно, что здѣсь получается многоугольникъ $AF_1R_1R_2RA$, называемый *многоугольникомъ силъ*. Силы, приложенныя къ тѣлу, образуютъ стороны этого многоугольника, идущія *по одному направленію или теченію*, а равнодѣйствующая представляетъ послѣднюю или *замыкающую* сторону, идущую по *встрѣчному* теченію.



Фиг. 39.

Отсюда понятно, что если, при построеніи многоугольника силъ, стороны его, замкнутся сами собой (фиг. 39), то это значитъ, что равнодѣйствующая сходящихся силъ *равна нулю*, или что *эти силы взаимно уравновѣшиваются*.

Слѣдствіе. Положимъ, что даны силы F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, сходящіяся въ точкѣ A. Найдемъ ихъ равнодѣйствующую по правилу многоугольника и затѣмъ спроектируемъ на нѣкоторую производительную ось XX. Изъ чертежа (фиг. 40) видно, что проек-

ція силы $F_1 = ab$; проекція $F_2 = bc$; проекція $F_3 = cd$; проекція $F_4 = de$; проекція $F_5 = eg$ *) и проекція $R = ag$. Такъ какъ

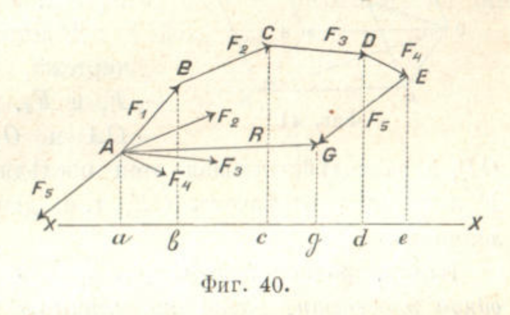
$$ag = ab + bc + cd + de - eg,$$

то слѣдовательно

проекція $R =$ пр. $F_1 +$ пр. $F_2 +$ пр. $F_3 +$ пр. $F_4 +$ пр. F_5,

или *проекція равнодѣйствующей сходящихся силъ на какую-либо ось равна суммѣ проекцій составляющихъ на ту же самую ось.* (Теорема проекцій силъ).

Примѣчаніе 1. Весьма понятно, что данныя силы мы можемъ складывать въ какомъ угодно порядкѣ, напр., силу F_1 съ силой F_3, затѣмъ силу F_2 съ силой F_4 и наконецъ ихъ равнодѣйствующія R' и R''. Въ результатѣ получимъ снова ту же самую равнодѣйствующую R. Итакъ, если силы будемъ складывать по правилу многоугольника въ различномъ порядкѣ, то форма многоугольниковъ можетъ быть различная, но послѣдняя или замыкающая сторона ихъ будетъ одна и таже прямая AR **).



Фиг. 40.

Примѣчаніе 2. Если данныя сходящіяся силы не лежатъ въ одной плоскости, то, при указанномъ построеніи, получается такъ называемый *косой* многоугольникъ, стороны котораго лежатъ въ разныхъ плоскостяхъ.

§ 99. **Параллелепипедъ силъ.** Сложеніе трехъ сходящихся силъ, не лежащихъ въ одной плоскости, кромѣ способа многоугольника, можно еще произвести способомъ построенія такъ называемаго *параллелепипеда силъ* Построеніе параллелепипеда силъ, очевидно, вполнѣ тождественно съ построеніемъ параллелепипеда скоростей или ускореній (§ 53).

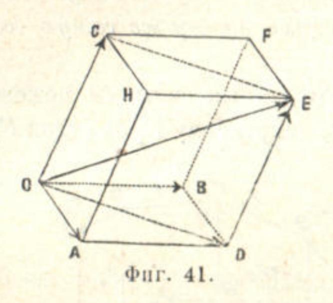
---

*) Проекціи, идущія по одному направленію (напр., направо) принято считать *положительными*, а идущія по противоположному направленію — *отрицательными*.

**) Предлагаемъ учащимся самостоятельно продѣлать нѣсколько такихъ упражненій и опредѣлить графически величину равнодѣйствующей по произвольно выбраннымъ слагающимъ, взятымъ въ опредѣленномъ масштабѣ силъ.

Положимъ, что даны три такія силы F_1, F_2 и F_3, сходящіяся въ точкѣ 0 и соотвѣтственно изображаемыя отрѣзками OA, OB и OC (фиг. 41).

Проведемъ три плоскости черезъ OA и OB, черезъ OA и OC и черезъ OB и OC, а затѣмъ черезъ точки A, B, C три другія плоскости, соотвѣтственно параллельныя тремъ плоскостямъ. Тогда у насъ получится параллелепипедъ $OABDCFEH$, діагональ котораго $OE = R$ и будетъ искомой равнодѣйствующей трехъ данныхъ силъ F_1, F_2, F_3.



Фиг. 41.

Дѣйствительно, какъ видно изъ чертежа, равнодѣйствующая силъ F_1 и F_2, изображаемыхъ отрѣзками OA и OB, выразится отрѣзкомъ OD, а равнодѣйствующая этой послѣдней силы и третьей силы F_3 выразится отрѣзкомъ OE, т. е. діагональю нашего параллелепипеда,

Итакъ, *равнодѣйствующая трехъ силъ, не лежащихъ въ одной плоскости, равна по величинѣ и направленію діагонали параллелепипеда, построеннаго на данныхъ силахъ, какъ на ребрахъ.*

Если три данныя силы F_1, F_2 и F_3 взаимно перпендикулярны, то при построеніи получается *прямоугольный* параллелепипедъ. Въ этомъ случаѣ, обозначивъ углы, образуемые силами F_1, F_2, F_3 съ равнодѣйствующей R, черезъ α, β и γ, и замѣтивъ, что данныя силы представляютъ проекціи равнодѣйствующей на ихъ направленія, будемъ имѣть слѣдующія равенства:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}; \quad \cos\alpha = \frac{F_1}{R}, \quad \cos\beta = \frac{F_2}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{F_3}{R}.$$

Примѣчаніе. Возвысивъ три послѣднія равенства въ квадратъ и сложивъ ихъ по частямъ, получимъ

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^3\gamma = \frac{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}{R^2} \quad \text{или}$$

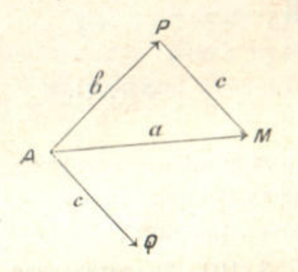
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

т.-е. сумма квадратовъ косинусовъ угловъ, образуемыхъ діагональю прямоугольнаго параллелепипеда съ его ребрами, равна единицѣ.

§ 100. **Разложеніе силъ.** Разложеніе силы на двѣ сходящіяся составляющія есть, вообще говоря, задача неопредѣленная, такъ какъ она сводится къ построенію треугольника силъ по одной данной сторонѣ. Поэтому, чтобы получить вполнѣ опредѣленное рѣшеніе, необходимо, кромѣ данной силы, знать еще какія-нибудь *двѣ* величины, достаточныя для построенія одного опредѣленнаго треугольника, напримѣръ, величины обѣихъ составляющихъ силъ, или углы, образуемые ихъ направленіями съ равнодѣйствующей, или величину и направленіе одной изъ составляющихъ и т. д. Приведемъ нѣсколько примѣровъ разложенія силъ.

Задача 1. Силу, выражаемую отрѣзкомъ a, разложить на двѣ силы, выражаемыя отрѣзками b и c (фиг. 42).

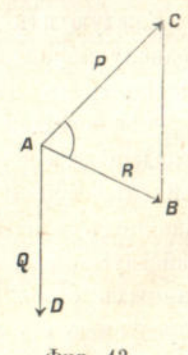
Вопросъ сводится къ построенію треугольника (силъ) по тремъ даннымъ сторонамъ a, b и c. Построивъ треугольникъ APM, изъ точки A проводимъ прямую AQ, равную и параллельную сторонѣ $PM = c$. Искомыя силы будутъ AP и AQ.



Фиг. 42.

Задача 2. Разложить силу $R = AB$ на двѣ силы, изъ которыхъ одна сила $P = AC$ дана по величинѣ и направленію (фиг. 43).

Построивъ треугольникъ ABC по двумъ сторонамъ и углу между ними, изъ точки A проведемъ прямую AD, равную и параллельную прямой CB. Прямая AD и выражаетъ искомую вторую слагающую Q по величинѣ и направленію.

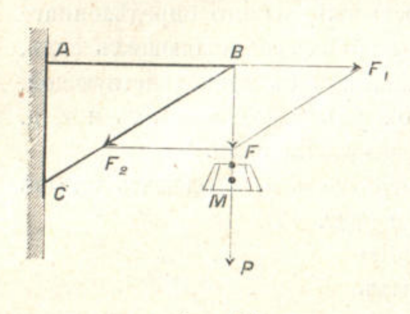


Фиг. 43.

Задача 3. На кронштейнѣ ABC, состоящемъ изъ двухъ стержней AB и BC, вдѣланныхъ въ стѣну, подвѣшенъ грузъ M, вѣсъ котораго графически изображается отрѣзкомъ MP. Опредѣлить натяженіе стержней AB и BC (фиг. 44).

Перенесемъ силу MP по ея направленію въ точку B и такъ, чтобы $BF = MP$ и разложимъ силу BF по направленіямъ AB и BC. Для этого изъ конца F данной силы проведемъ прямыя FF_1 и FF_2, параллельныя AB и BC, до пересѣченія съ этими

линіями или ихъ продолженіями. Тогда получимъ параллелограммъ BF_1FF_2, стороны котораго BF_1 и BF_2 и выражаютъ искомыя натяженія стержней. Изъ направленія найденныхъ слагающихъ можемъ заключить еще, что сила BF_1 *растягиваетъ* стержень AB, а сила BF_2 *сжимаетъ* стержень BC.



Фиг. 44.

Предлагается рѣшить эту же задачу вычисленіемъ, если грузъ равняется 10 килогр., а уголъ ABC равенъ: 1) 30^0; 2) 45^0; 3) 50^0.

Разложеніе данной силы F на три составляющихъ опредѣленнымъ образомъ возможно только въ томъ случаѣ, если даны *три* дополнительныя величины, напримѣръ, три угла, образуемые направленіями искомыхъ слагающихъ и равнодѣйствующей. Вопросъ сводится тогда къ построенію параллелепипеда по данной діагонали и угламъ, составляемымъ ею съ ребрами.

§ 101. **Аналитическое опредѣленіе равнодѣйствующей нѣсколькихъ сходящихся силъ** производится совершенно также, какъ опредѣленіе составной скорости сложнаго движенія (§ 56).

Каждую изъ данныхъ силъ F_1, F_2, $F_3 \ldots F_n$ разлагаютъ по правилу параллелепипеда на три составляющія силы по направленію трехъ взаимно-перпендикулярныхъ осей OX, OY и OZ, пересѣкающихся въ точкѣ 0 приложенія данныхъ силъ. Затѣмъ складываютъ полученныя составляющія силы, идущія вдоль каждой изъ осей и находятъ ихъ равнодѣйствующія R_x, R_y и R_z. Наконецъ складываютъ по правилу параллелепипеда эти три равнодѣйствующія и получаютъ общую равнодѣйствующую R всѣхъ данныхъ силъ. Эта равнодѣйствующая, а также углы α, β, γ, образуемые ею съ составляющими R_x, R_y и R_z опредѣлятся по извѣстнымъ уже формуламъ:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1);$$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos\gamma = \frac{R_z}{R} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Частный случай. Если всѣ сходящіяся силы лежатъ *въ одной плоскости*, то ихъ слѣдуетъ разложить (или спроектировать) по направленіямъ двухъ осей OX и OY, лежащихъ въ той же самой плоскости и затѣмъ сложить въ двѣ равнодѣйствующія R_x и R_y. Общая равнодѣйствующая всѣхъ силъ, очевидно, будетъ

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

а уголъ α, образуемый ею съ составляющей R_x, опредѣлится изъ равенствъ:

$$R_x = R\cos\alpha\,;\;\; R_y = R\sin\alpha\,;\;\; \operatorname{tang}\alpha = \frac{R_y}{R_x}.$$

Слѣдствіе. Изъ выраженія $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ слѣдуетъ, что $R = 0$, если $R_x = 0$, $R_y = 0$ и $R_z = 0$, т.-е. что равнодѣйствующая нѣсколькихъ сходящихся силъ только тогда равна нулю, когда *каждая* изъ ея составляющихъ по 3-мъ взаимно перпендикулярнымъ осямъ равна нулю.

Отсюда вытекаетъ, что три сходящіяся силы, не лежащія въ одной плоскости, не могутъ взаимно уравновѣшиваться, такъ какъ всегда имѣютъ равнодѣйствующую, не равную нулю.

Сложеніе параллельныхъ силъ.

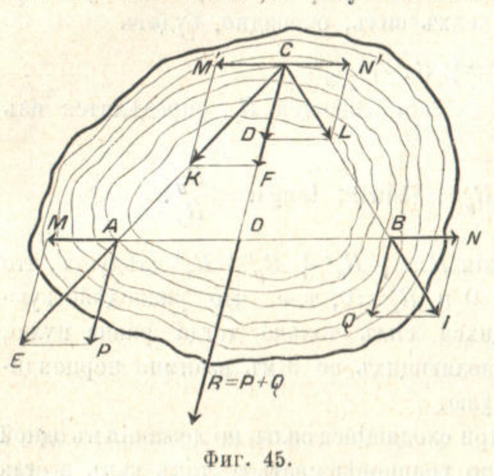
§ 102. **Сложеніе двухъ параллельныхъ силъ, дѣйствующихъ въ одну сторону.** *Равнодѣйствующая двухъ параллельныхъ силъ, дѣйствующихъ въ одну сторону, равна суммѣ ихъ, параллельна имъ и направлена въ ту же сторону; точка приложенія ея дѣлитъ прямую, соединяющую точки приложенія составляющихъ на части, обратно пропорціональныя этимъ силамъ.*

Положимъ, что къ двумъ точкамъ A и B свободнаго тѣла приложены двѣ параллельныя и въ одну сторону направленныя силы P и Q (фиг. 45). Требуется найти величину, направленіе и точку приложенія ихъ равнодѣйствующей.

Соединимъ точки A и B прямою и къ концамъ ея приложимъ равныя и прямо-противоположныя силы M и N. Какъ извѣстно, эти двѣ силы взаимно уравновѣсятся и никакого измѣненія въ состояніи тѣла не произведутъ.

Теперь сложимъ сходящіяся силы AP и AM, а также BQ и BN и затѣмъ перенесемъ равнодѣйствующія AE и BJ въ точку C

ихъ пересѣченія, такъ что $AE = CK$ и $BJ = CL$. Проведемъ черезъ точку C прямую $M'N'$, параллельную AB, и прямую CO, параллельную направленію силъ P и Q. Разложимъ силу CK на силы CF и CM', а силу CL на силы CD и CN'.



Фиг. 45.

Изъ равенства $\triangle$-ковъ AME и $CM'K$ слѣдуетъ, что $AM = CM'$, а изъ равенства $\triangle$-ковъ BNJ и $CN'L$,— что $BN = CN'$. Но такъ какъ $AM = BN$, то и $CM' = CN'$, а потому эти силы, какъ равныя и прямопротивоположныя, можно отбросить.

Тогда у насъ останутся только двѣ силы: CF—равная и параллельная силѣ P и CD—равная и параллельная силѣ Q. Сложивъ силы CF и CD, получимъ искомую равнодѣйствующую $R = P + Q$.

Перенесемъ точку приложенія равнодѣйствующей въ точку O, лежащую на прямой AB, и найдемъ отношеніе $\frac{AO}{BO}$.

Изъ подобныхъ $\triangle$-ковъ ACO и KCF находимъ, что

$$\frac{AO}{CO} = \frac{KF}{CF} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

а изъ подобныхъ $\triangle$-ковъ BCO и LCD, что

$$\frac{BO}{CO} = \frac{DL}{CD} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Раздѣливъ по частямъ равенства (1) и (2), получимъ

$$\frac{AO \, . \, CO}{CO \, . \, BO} = \frac{KF \, . \, CD}{CF \, . \, DL}, \quad \text{или}$$

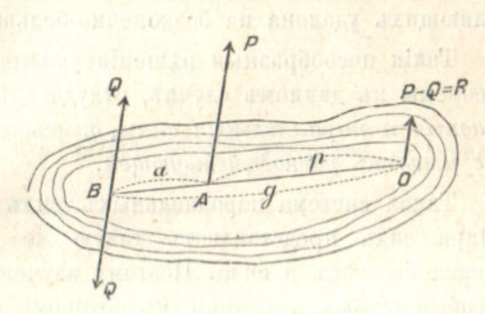
замѣтивъ, что $KF = DL$ и сокративъ:

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CD}{CF}, \text{ или наконецъ: } \frac{AO}{BO} = \frac{Q}{P} \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

т.-е. прямая AB дѣлится въ точкѣ O на части AO и BO, обратно пропорціональныя силамъ P и Q.

§ 103. **Сложеніе двухъ параллельныхъ силъ, дѣйствующихъ въ разныя стороны.** *Равнодѣйствующая двухъ параллельныхъ силъ, равна ихъ разности, параллельна имъ, дѣйствуетъ въ направленіи бóльшей силы и приложена въ точкѣ, разстоянія которой отъ точекъ приложенія составляющихъ обратно пропорціональны этимъ силамъ.*

Положимъ, что въ точкахъ A и B тѣла приложены двѣ параллельныя силы P и Q, при чемъ $P > Q$ (фиг. 46). Разложимъ силу P на двѣ параллельныя слагающія силы такъ, чтобы одна изъ нихъ была равна силѣ Q и приложена къ точкѣ A. На основаніи предыдущей теоремы находимъ, что вторая слагающая равна $P - Q$ (такъ какъ $Q + P - Q = P$) и приложена въ точкѣ O, разстояніе которой отъ точки B опредѣлится изъ только что выведенной пропорціи



Фиг. 46.

$$\frac{AB}{AO} = \frac{P - Q}{Q} \ldots\ldots\ldots (1).$$

Теперь, вмѣсто двухъ силъ P и Q, имѣемъ три силы $P - Q$, Q и Q, изъ которыхъ двѣ послѣднія, какъ равныя и прямопротивоположныя, взаимно уравновѣшиваются и потому могутъ быть отброшены. Такимъ образомъ остается только одна сила $P - Q = R$, которая, слѣдовательно, и будетъ искомой равнодѣйствующей.

Чтобы найти отношеніе разстояній точки O приложенія равнодѣйствующей отъ точекъ A и B приложенія составляющихъ P и Q, прибавимъ къ обѣимъ частямъ пропорціи (1) по единицѣ.

Тогда получимъ:

$$\frac{AB + AO}{AO} = \frac{P - Q + Q}{Q} \text{ или } \frac{BO}{AO} = \frac{P}{Q},$$

что и слѣдовало доказать.

§ 104. **Пара силъ.** Сложеніе двухъ параллельныхъ силъ P и Q, дѣйствующихъ въ разныя стороны, представляетъ весьма замѣчательную особенность, когда $P = Q$, т.-е. когда эти силы равны.

Въ этомъ случаѣ равнодѣйствующая $R = P - Q = O$, а разстояніе ея отъ точки A или $AO = \frac{AB \, . \, Q}{P - Q} = \frac{AB \, . \, Q}{O} = \infty$, т.-е. равнодѣйствующая равна нулю, а точка приложенія ея отъ составляющихъ удалена на безконечно-большое разстояніе.

Такія несообразныя рѣшенія указываютъ на непримѣнимость теоремы въ данномъ случаѣ, откуда слѣдуетъ заключить, что *двѣ равныя и параллельныя силы, дѣйствующія въ разныя стороны, не имѣютъ равнодѣйствующей.*

Такая система параллельныхъ силъ называется *парой силъ.* Пара силъ представляетъ такую же самостоятельную причину движенія, какъ и сила. Поэтому изученіе ея свойствъ составляетъ особый отдѣлъ механики, къ которому мы и перейдемъ въ ближайшемъ будущемъ.

105. **Зависимость между силами P, Q и R и разстояніями ихъ точекъ приложенія.** Назовемъ черезъ $a = AB$ разстояніе между точками приложенія силъ P и Q, а черезъ p и q — разстоянія AO и BO этихъ точекъ отъ точки приложенія равнодѣйствующей R. Между силами P, Q, R и разстояніями p, q, a существуетъ постоянная зависимость, одинаково справедливая, будутъ ли параллельныя слагающія P и Q направлены въ одну или въ разныя стороны, а именно:

$$\frac{R}{a} = \frac{P}{q} = \frac{Q}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

или *отношеніе каждой изъ трехъ силъ P, Q и R къ разстоянію между точками приложенія двухъ остальныхъ силъ есть величина постоянная.*

Докажемъ эту теорему. Какъ уже было выведено для обоихъ случаевъ:

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

1-й случай. Прибавимъ къ обѣимъ частямъ равенства (2) по единицѣ. Тогда

$$\frac{P+Q}{Q}=\frac{p+q}{p},$$

или (см. фиг. 45)

$$\frac{R}{Q}=\frac{a}{p}, \text{ или } \frac{R}{a}=\frac{Q}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Написавъ равенство (2) въ видѣ $\frac{P}{q}=\frac{Q}{p}$ и, соединивъ его съ равенствомъ (3), получимъ

$$\frac{R}{a}=\frac{P}{q}=\frac{Q}{p}.$$

2-й случай. Вычтемъ изъ обѣихъ частей равенства (2) по единицѣ. Тогда

$$\frac{P-Q}{Q}=\frac{q-p}{p},$$

или (см. фиг. 46)

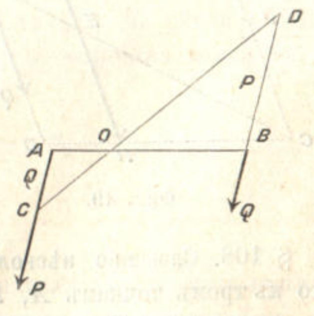
$$\frac{R}{Q}=\frac{a}{p}, \quad \text{или} \quad \frac{R}{a}=\frac{Q}{p}.$$

Соединивъ только что указаннымъ образомъ это равенство съ равенствомъ (2) по прежнему получимъ

$$\frac{R}{a}=\frac{P}{q}=\frac{Q}{p}.$$

§ 106. **Графическое опредѣленіе точки приложенія равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ.** По даннымъ слагающимъ P и Q и разстоянію a между ихъ точками приложенія, легко опредѣлить построеніемъ точку приложенія равнодѣйствующей.

Для этого отъ точки A (фиг. 47 и 48) по направленію бо́льшей силы отложимъ отрѣзокъ $AC=$ величинѣ меньшей силы Q, а отъ точки B по направленію, противоположному силѣ Q, отложимъ отрѣзокъ BD=величинѣ силы P. Соединивъ точки C и D прямою, находимъ въ пересѣченіи прямой CD съ AB (или ея про-



Фиг. 47.

долженіемъ) точку O, которая и есть искомая точка приложенія равнодѣйствующей.

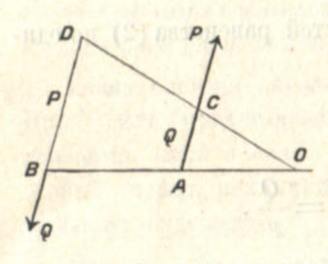
Дѣйствительно изъ подобныхъ △-ковъ AOC и BOD имѣемъ, что

$$\frac{AO}{BO}=\frac{Q}{P}.$$

§ 107. **Разложеніе равнодѣйствующей на двѣ составляющія** производится при помощи основныхъ уравненій

$$R=P\pm Q \quad \text{и} \quad \frac{R}{a}=\frac{P}{q}=\frac{Q}{p}.$$

Такъ какъ изъ *трехъ* уравненій можно опредѣлить только *три* неизвѣстныя величины, то, слѣдовательно, задача о разложеніи равнодѣйствующей R имѣетъ опредѣленное рѣшеніе только въ тѣхъ случаяхъ, когда изъ 5 величинъ a, p, q, P, Q двѣ величины даны условіями задачи *).

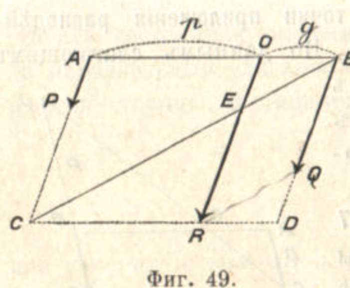


Фиг. 48.

Въ качествѣ примѣра, укажемъ графическое рѣшеніе слѣдующей задачи:

Разложить силу R на двѣ параллельныя силы, дѣйствующія въ одну сторону, если даны p и q.

Построимъ на прямой $AB=a=p+q$ параллелограммъ такъ, чтобы сторона его AC была равна и параллельна прямой $OR=R$. Діагональ BC параллелограмма разсѣчетъ прямую OR въ точкѣ E на два отрѣзка $OE=P$ и $ER=Q$, которые и представятъ искомыя слагающія. Дѣйствительно, изъ подобныхъ △-ковъ ABC, OBE и CER слѣдуетъ, что



Фиг. 49.

$$\frac{R}{a}=\frac{P}{q}=\frac{Q}{p}.$$

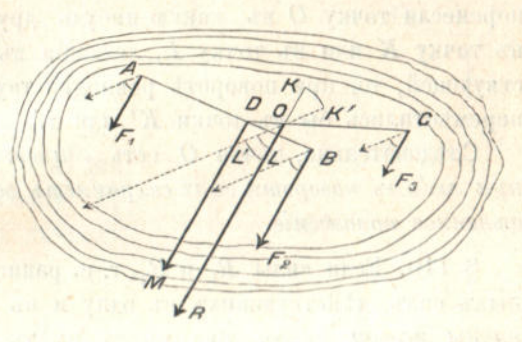
§ 108. **Сложеніе нѣсколькихъ параллельныхъ силъ.** Положимъ, что къ тремъ точкамъ A, B и C абсолютно твердаго тѣла прило-

*) Учащимся рекомендуется заняться самостоятельно рѣшеніемъ этихъ задачъ, какъ вычисленіемъ (аналитически), такъ и построеніемъ (графически).

жены параллельныя силы F_1, F_2 и F_3, дѣйствующія по одному направленію. Требуется найти величину, направленіе и точку приложенія равнодѣйствующей.

Сложивъ по извѣстнымъ уже правиламъ сперва двѣ силы F_1 и F_2, найдемъ ихъ равнодѣйствующую $M = F_1 + F_2$ и точку D ея приложенія. Сложивъ затѣмъ силу M и третью данную силу F_3, найдемъ искомую равнодѣйствующую $R = F_1 + F_2 + F_3$ и точку O ея приложенія.

Точно также поступаютъ, если дано 4 и болѣе силъ.



Фиг. 50.

Если дано нѣсколько параллельныхъ силъ, изъ которыхъ однѣ P_1, P_2, P_3.... дѣйствуютъ въ одну сторону, а другія P'_1, P'_2, P'_3.... въ другую сторону, то, сложивъ сперва всѣ силы, дѣйствующія въ одну, а затѣмъ всѣ силы, дѣйствующія въ другую сторону, получимъ двѣ равнодѣйствующія параллельныя силы, идущія въ разныя стороны:

$$R_1 = P_1 + P_2 + P_3 + \dots \quad \text{и} \quad R_2 = P'_1 + P'_2 + P'_3 + \dots$$

Сложивъ силы R_1 и R_2, получимъ равнодѣйствующую R всѣхъ данныхъ силъ. Направленіе равнодѣйствующей R, очевидно параллельно направленію данныхъ силъ, а величина равна алгебраической суммѣ ихъ, т.-е.

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots - P'_1 - P'_2 - P'_3 - \dots$$

или, короче:

$$R = \Sigma P.$$

Примѣчаніе. Весьма понятно, что параллельныя силы, приложенныя къ тѣлу, могутъ и не находиться въ одной плоскости.

§ 109. **Центръ параллельныхъ силъ.** Точка O приложенія равнодѣйствующей, опредѣленная по извѣстнымъ правиламъ сложенія

параллельныхъ силъ, обладаетъ замѣчательнымъ свойствомъ, вслѣдствіе котораго она носитъ особое названіе *центра параллельныхъ силъ*.

Вообразимъ, что мы повернули всѣ данныя силы около ихъ точекъ приложенія на одинъ и тотъ же уголъ, т.-е. не измѣняя ихъ параллельности. Тогда, очевидно, и равнодѣйствующая R повернется на тотъ же самый уголъ, причемъ величина и точка O приложенія ея останутся безъ измѣненія. Но если бы мы ранѣе перенесли точку O въ какую-нибудь другую точку, напримѣръ, въ точку K или въ точку L, лежащія въ направленіи равнодѣйствующей, то, при поворотѣ равнодѣйствующей, эти точки также перемѣстились бы въ точки K' или L'.

Слѣдовательно, точка O есть *единственная точка*, *которая при любомъ поворотѣ силъ сохраняетъ всегда одно и то же опредѣленное положеніе*.

§ 110. Если силы R_1 и R_2, т.-е. равнодѣйствующія параллельныхъ силъ, дѣйствующихъ въ одну и въ другую сторону, будутъ *равны между собою*, то будемъ имѣть одинъ изъ слѣдующихъ двухъ случаевъ.

1-й случай. Если R_1 и R_2 имѣютъ одну общую точку приложенія, то эти силы, какъ равныя и прямо-противоположныя, взаимно уравновѣсятся, т.-е. ихъ общая равнодѣйствующая R будетъ $= O$ и, слѣдовательно, тѣло подъ дѣйствіемъ всѣхъ данныхъ силъ останется въ равновѣсіи.

2-й случай. Если R_1 и R_2 приложены въ двухъ различныхъ точкахъ, то эти силы образуютъ такъ называемую *пару силъ*, которая не можетъ быть уравновѣшена одной силой, такъ какъ не имѣетъ равнодѣйствующей. Пара силъ, какъ скоро увидимъ, можетъ быть уравновѣшена только другой парой силъ.

§ 111. **Разложеніе данной силы на нѣсколько параллельныхъ** есть задача, вообще говоря, неопредѣленная и даже не всегда возможная. Рѣшимъ для примѣра одну изъ такихъ задачъ.

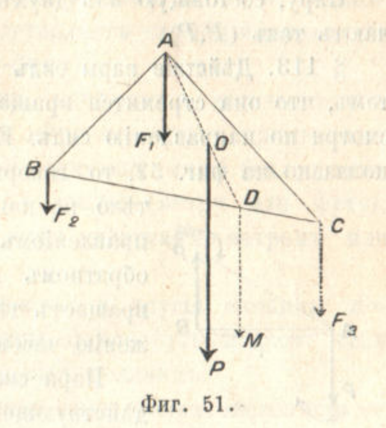
На столъ, опирающійся на три ножки, положенъ грузъ P. Опредѣлить давленіе отъ груза на каждую изъ трехъ ножекъ.

Вопросъ сводится къ разложенію силы P, приложенной въ точкѣ O, на три параллельныя составляющія силы, приложенныя въ точкахъ A, B, C (фиг. 51).

Соединимъ прямою AO точки A и O и продолжимъ ее до пересѣченія съ прямой BC въ точкѣ D.

Измѣривъ разстоянія AO и DO, разложимъ силу P на двѣ параллельныя составляющія F_1 и M, приложенныя въ точкахъ A и D, принимая во вниманіе извѣстныя равенства:

$$P = F_1 + M \text{ и } \frac{OD}{AO} = \frac{F_1}{M}.$$



Фиг. 51.

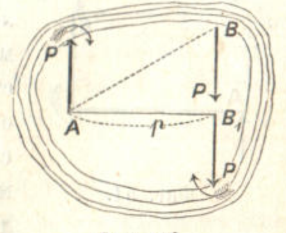
Затѣмъ точно такимъ же способомъ разложимъ силу M на двѣ параллельныя составляющія F_2 и F_3, приложенныя въ точкахъ B и C, по условіямъ

$$M = F_2 + F_3 \quad \text{и} \quad \frac{DC}{DB} = \frac{F_2}{F_3}.$$

Итакъ, предложенная задача имѣетъ вполнѣ опредѣленное рѣшеніе*).

Пары силъ.

§ 112. **Опредѣленія**. Какъ уже извѣстно изъ предыдущаго, двѣ равныя параллельныя силы P и P, направленныя въ разныя стороны и приложенныя къ двумъ точкамъ A и B одного и того же твердаго тѣла, образуютъ такъ называемую *пару силъ* (фиг. 52). Кратчайшее разстояніе AB_1 между силами называется *плечомъ* пары. Такъ какъ точку B приложенія силы всегда можно перенести въ точку B_1 конца плеча, то въ дальнѣйшемъ изложеніи мы всегда будемъ принимать, что концы плеча или перпендикуляра къ обѣимъ силамъ пары совпадаютъ съ точками приложенія этихъ силъ. Плоскость, проходящая черезъ



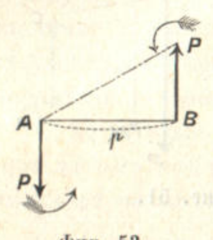
Фиг. 52.

*) Рекомендуемъ рѣшить эту задачу графически и аналитически по самостоятельно выбраннымъ даннымъ величинамъ.

обѣ силы пара, называютъ *плоскостью пары* (плоскостью дѣйствія пары).

Пару, состоящую изъ двухъ силъ P и P, сокращенно обозначаютъ такъ (P,P).

§ 113. **Дѣйствіе пары силъ** на тѣло, очевидно, заключается въ томъ, что она стремится вращать тѣло въ ту или другую сторону, смотря по направленію силъ. Если силы направлены такъ, какъ показано на фиг. 52, то говорятъ, что пара стремится вращать тѣло по направленію, совпадающему съ направленіемъ движенія часовой стрѣлки. При обратномъ направленіи силъ (фиг. 53) пара вращаетъ тѣло въ направленіи, обратномъ движенію часовой стрѣлки.

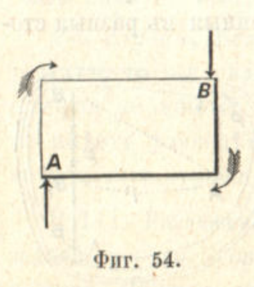


Фиг. 53.

Пара силъ, какъ извѣстно, не имѣетъ равнодѣйствующей, т.-е. пара не можетъ быть замѣнена, а слѣдовательно и не можетъ быть уравновѣшена какой-либо силой. Это прямо вытекаетъ изъ того простого соображенія, что *сила* стремится сообщить свободному тѣлу *поступательное* движеніе, а *пара—вращательное*.

Такимъ образомъ *пара силъ представляетъ особую самостоятельную причину вращательнаго движенія*.

Дѣйствіе пары силъ можно обнаружить на слѣдующемъ простомъ опытѣ. Положимъ на гладкій столъ какой-нибудь предметъ, напр. переплетенную книгу, и сообщимъ ему въ точкахъ A и B (фиг. 54) по направленіямъ, указаннымъ стрѣлками, два одновременныхъ и равносильныхъ толчка посредствомъ двухъ равноупругихъ и одинаковыхъ сжатыхъ пружинъ (или еще проще посредствомъ двухъ щелчковъ пальцами). Мы замѣтимъ тогда, во-1-хъ, что наше тѣло получитъ только одно вращательное движеніе (безъ поступательнаго) по направленію движенія часовой стрѣлки, и, во-2-хъ, что нельзя найти на тѣлѣ такой точки, приложивъ къ которой какую-нибудь силу, можно было бы остановить вращеніе. Вращеніе прекращается здѣсь вслѣдствіе сопротивленій отъ тренія.



Фиг. 54.

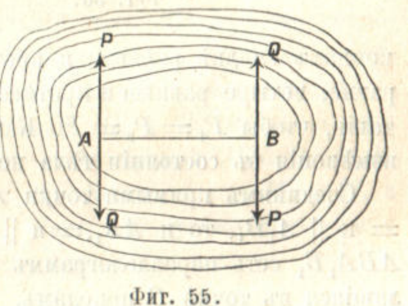
§ 114. **Моментомъ пары** называется произведенiе $P.p$ изъ величины одной силы P пары на длину p ея плеча (фиг. 52—53). Такъ какъ силы измѣряются единицами вѣса, а плечи—единицами длины, то моментъ пары представляетъ сложно-именованное число (килограммо-метры или пудо-футы).

Моментомъ пары, какъ увидимъ, измѣряется *величина* или *напряженiе пары*. За единицу или мѣру моментовъ принимаютъ моментъ, равный произведенiю изъ единицы силы (килограммъ или пудъ (на плечо, равное единицѣ длины (метру или футу). Такая единица моментовъ называется килограммо-метромъ или пудо-футомъ *).

Вполнѣ понятно, что употребляются и другiя единицы моментовъ, напр., килограммо-сантиметры, фунто-футы и проч., если это окажется удобнымъ по роду данныхъ величинъ.

Замѣтимъ, что численная величина пары равна численной величинѣ удвоенной площади $\triangle$-ка ABP (фиг. 53).

Если пара стремится вращать тѣло по направленiю движенiя часовой стрѣлки, то моментъ ея считается *положительнымъ*, а если въ обратномъ направленiи, то—*отрицательнымъ*.



Фиг. 55.

§ 115. **Основныя свойства паръ.** Двѣ пары (P,P) и (Q,Q) имѣющiя общее плечо AB (фиг. 55), равныя по величинѣ силъ ($P=Q$) и противоположныя по ихъ направленiю, взаимно уничтожаются или уравновѣшиваются. Это слѣдуетъ изъ того, что такiя двѣ пары представляютъ ничто иное, какъ систему четырехъ взаимноуравновѣшивающихся силъ.

Всякую пару безъ измѣненiя ея дѣйствiй можно:

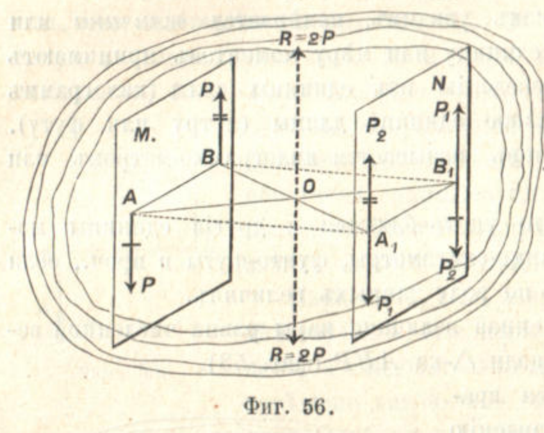
1) перенести параллельно самой себѣ въ любое мѣсто ея плоскости или даже другой параллельной плоскости;

2) повернуть на произвольный уголъ около какой угодно точки ея плеча или его продолженiя;

*) Замѣтимъ, что 1 пудо-футъ=5 килограммо-метрамъ.

3) замѣнить другой парой съ другой силой и другимъ плечомъ, но съ тѣмъ же моментомъ по величинѣ и направленію.

§ 116. **Параллельное перенесеніе пары.** Положимъ, что къ нѣкоторому тѣлу въ плоскости M приложена пара (P,P) съ плечомъ AB (фиг. 56). Эту пару можно перенести параллельно самой себѣ въ какое угодно мѣсто этой плоскости или другой параллельной плоскости, напр. плоскости N, принадлежащей тому же самому тѣлу. Докажемъ вторую часть этой теоремы.



Фиг. 56.

Проведемъ гдѣ-либо въ плоскости N прямую A_1B_1, равную и параллельную прямой AB, и приложимъ къ концамъ ея двѣ равныя и противоположныя пары или, что все равно, четыре равныя и противоположныя силы (P_1,P_1) и (P_2,P_2), такія, чтобы $P_1 = P_2 = P$. Какъ извѣстно, при этомъ никакого измѣненія въ состояніи тѣла не произойдетъ.

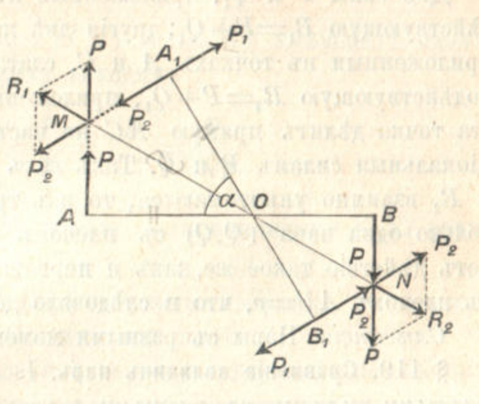
Соединимъ прямыми точки A, B, A_1 и B_1. Такъ какъ $AB =$ $=$ и $\|$ A_1B_1, то и AA_1, $=$ и $\|$ BB_1. Слѣдовательно, 4-угольникъ ABA_1B_1 есть параллелограммъ и AB_1, BA_1 — діагонали его, дѣлящіяся въ точкѣ O пополамъ.

Сложивъ параллельныя и въ одну сторону направленныя силы, приложенныя къ точкамъ A и B_1, а также къ точкамъ B и A_1, получимъ двѣ равныя и прямопротивоположныя равнодѣйствующія $2P$, приложенныя къ точкѣ O, которыя взаимно уничтожаются.

Итакъ, у насъ осталась только одна пара (P_1,P_1) съ плечомъ A_1B_1, которую можемъ разсматривать, какъ первоначальную пару (P,P), перенесенную параллельно самой себѣ въ параллельную плоскость, причемъ никакого измѣненія въ дѣйствіи пары не произошло.

Очевидно, что доказательство не измѣнится, если пару (P,P) мы передвинемъ параллельно самой себѣ въ ея плоскости M.

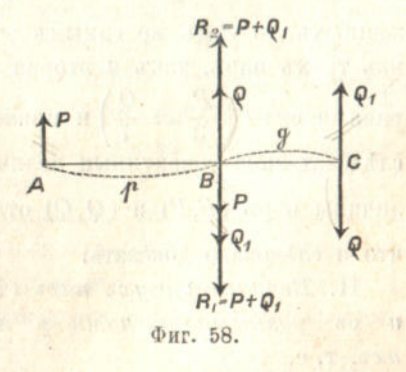
§ 117. **Вращеніе пары.** Пусть дана пара (P,P) съ плечомъ AB (фиг. 57). Проведемъ прямую A_1B_1, пересѣкающую AB въ точкѣ O подъ произвольнымъ угломъ α и отложимъ $OA_1 = OA$ и $OB_1 = OB$. Такимъ образомъ мы какъ будто повернули прямую AB, около точки O на уголъ α.



Фиг. 57.

Приложимъ къ концамъ прямой A_1B_1 двѣ равныя и противоположныя пары (P_1P_1) и (P_2P_2), причемъ $P_1 = P_2 = P$.

Не трудно замѣтить изъ равенства $\triangle$-ковъ AOM и A_1OM и $\triangle$-ковъ BON и B_1ON, что прямая MN, соединяющая точки M и N пересѣченія направленій силъ P и P_2, есть равнодѣлящая угла α. Поэтому, если перенесемъ точки приложенія равныхъ силъ P и P_2 въ точки M и N и сложимъ эти силы, то получимъ двѣ равныя равнодѣйствующія R_1 и R_2, направленныя прямо противоположно другъ другу вдоль прямой MN. Это слѣдуетъ изъ того, что прямыя R_1 и R_2 дѣлятъ углы M и N, а слѣдовательно и уголъ α пополамъ. Такъ какъ равнодѣйствующія R_1 и R_2 взаимно уничтожаются, то изъ всѣхъ шести силъ у насъ осталось только двѣ, образующія пару (P_1,P_1) съ плечомъ A_1B_1, которая произведетъ точно такое же дѣйствіе, какъ и первоначально данная пара (P,P).



Фиг. 58.

§ 118. **Замѣна одной пары другой съ равнымъ моментомъ.** Пусть дана пара (P,P) съ плечомъ $AB = p$ (фиг. 58). Продолжимъ AB на произвольную длину $BC = q$ и приложимъ къ концамъ BC двѣ равныя и противоположныя пары (Q,Q) и (Q_1,Q_1). Равныя силы Q и Q_1 выберемъ такія, чтобы величина ихъ опредѣлялась

равенствомъ моментовъ $Pp = Qq$, или, что все равно, пропорціей: $\frac{Q}{P} = \frac{p}{q}$, откуда $Q = P.\frac{p}{q}$.

Двѣ силы P и Q_1, приложенныя къ точкѣ B, дадутъ равнодѣйствующую $R_1 = P + Q_1$; другія двѣ параллельныя силы P и Q_1, приложенныя въ точкахъ A и C, слагаясь, дадутъ такую же равнодѣйствующую $R_2 = P + Q_1$, приложенную тоже въ точкѣ B, ибо эта точка дѣлитъ прямую AC на части p и q, обратно пропорціональныя силамъ P и Q. Такъ какъ двѣ равнодѣйствующія R_1 и R_2 взаимно уничтожаются, то изъ трехъ паръ у насъ остается только одна пара (Q, Q) съ плечомъ $BC = q$, которая произведетъ дѣйствіе такое же, какъ и первоначально данная пара (P, P) съ плечомъ $AB = p$, что и слѣдовало доказать.

Слѣдствіе. Пары съ равными моментами равны между собою.

§ 119. Сравненіе величинъ паръ. I. *Величины двухъ паръ съ разными силами, но равными плечами относятся какъ величины* силъ.

Положимъ, что къ одному и тому же плечу или къ двумъ равнымъ плечамъ приложены двѣ пары (P, P) и (Q, Q) и для примѣра допустимъ, что $\frac{P}{Q} = \frac{3}{7}$, откуда $\frac{P}{3} = \frac{Q}{7}$.

Легко видѣть, что дѣйствіе пары (P, P) одинаково съ дѣйствіемъ *трехъ* равныхъ паръ $\left(\frac{P}{3}, \frac{P}{3}\right)$, а дѣйствіе пары (Q, Q) одинаково съ дѣйствіемъ *семи* равныхъ паръ $\left(\frac{Q}{7}, \frac{Q}{7}\right)$, приложенныхъ къ тѣмъ же самымъ плечамъ. Но какъ первая группа изъ трехъ паръ, такъ и вторая группа изъ 7-ми паръ имѣютъ равныя силы $\left(\frac{P}{3} = \frac{Q}{7}\right)$ и приложены къ одинаковымъ плечамъ, слѣдовательно совокупныя величины ихъ или, что все равно, величины паръ (P, P) и (Q, Q) относятся какъ $\frac{3}{7}$ или какъ $P : Q$, что и слѣдовало доказать.

II. *Величины двухъ паръ (P, P) и (Q, Q) съ разными силами и съ разными плечами p и q относятся какъ моменты ихъ*, т. е.

$$\frac{(P, P)}{(Q, Q)} = \frac{Pp}{Qq}.$$

Замѣнимъ пару (Q,Q) равной ей парой (X,X) имѣющей плечо p. Силы этой третьей пары найдутся по условію $Xp = Qq$, откуда $X = Q\,\frac{q}{p}$.

Сравнивая величины паръ (P,P) и (X,X), имѣющихъ одинаковыя плечи, по предыдущему находимъ

$$\frac{(P,P)}{(X,X)} = \frac{P}{X} = \frac{P}{Q\frac{q}{p}} = \frac{Pp}{Qq},$$

что и слѣдовало доказать, такъ какъ величина пары (X,X) равна величинѣ пары (Q,Q).

Слѣдствіе 1. Величины паръ съ равными силами, но разными плечами, относятся какъ величины ихъ плечъ.

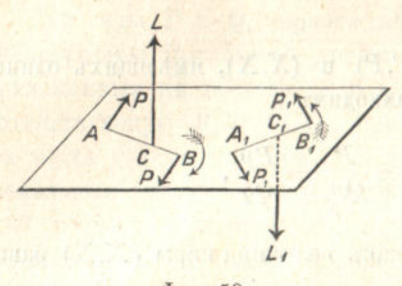
Слѣдствіе 2. Изъ доказанной теоремы слѣдуетъ, что *величины паръ пропорціональны величинамъ ихъ моментовъ*, откуда понятно, что измѣреніе величинъ или напряженій паръ сводится къ измѣренію ихъ моментовъ.

§ 120. **Ось пары.** Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что подобно тому какъ *сила* вполнѣ опредѣляется: 1) своей точкой приложенія; 2) направленіемъ и 3) величиной, точно такъ же и *пара* опредѣляется: 1) своей плоскостью; 2) направленіемъ вращенія и 3) величиной момента. Затѣмъ какъ силу можно переносить куда угодно по ея направленію, также и пару можно произвольно переносить и поворачивать въ ея плоскости или въ плоскости параллельной. Знаменитый французскій ученый *Пуансо* (1777—1859), создавшій въ своемъ сочиненіи „Начала статики“ теорію паръ силъ, замѣтивъ такое сходство (аналогію) между элементами, опредѣляющими силы и пары, предложилъ изображать геометрически пару, подобно силѣ, однимъ прямолинейнымъ отрѣзкомъ, назвавъ его *осью пары*.

Ось пары строится такъ. Положимъ, что дана пара силъ, (P,P), лежащая въ нѣкоторой плоскости (фиг. 59). Возставимъ въ какой-нибудь точкѣ этой плоскости *), напр., въ точкѣ C плеча пары перпендикуляръ къ плоскости слѣдующимъ образомъ.

*) Такъ какъ пару можно какъ угодно перемѣщать въ ея плоскости, то и ось пары можно возставить въ любой точкѣ плоскости и перемѣщать параллельно самой себѣ.

Вообразимъ наблюдателя, стоящаго на плоскости и смотрящаго на ея вращеніе, производимое парой. Если это вращеніе будетъ происходить относительно него по направленію движенія часовой стрѣлки (т.-е. если моментъ пары *положительный*), то перпендикуляръ слѣдуетъ возставить въ сторону наблюдателя (напр. вверхъ), а если вращеніе происходитъ въ обратномъ направленіи (т.-е. моментъ пара отрицательный), то перпендикуляръ слѣдуетъ возставить въ сторону, обратную отъ наблюдателя (напр. внизъ).



Фиг. 59.

Затѣмъ на этомъ перпендикулярѣ отложимъ величину момента $L=P.p$ пары въ условномъ масштабѣ, принимая, напр., 1 килограммо-метръ $=$1-му сантиметру, или 1 пудо-футъ $=$1-му дюйму и т. п.

Построенная такимъ образомъ ось L, дѣйствительно, вполнѣ опредѣляетъ всѣ элементы пары: плоскость пары опредѣляется тѣмъ, что она перпендикулярна къ оси L, направленіе вращенія опредѣляется направленіемъ оси, наконецъ величина или напряженіе пары—величиной оси.

Точно также построимъ ось L другой пары (P_1, P_1), лежащей въ той же плоскости, но имѣющей отрицательный моментъ.

Представленіе паръ ихъ осями позволяетъ значительно упрощать различныя дѣйствія, производимыя съ парами силъ. Какъ сейчасъ увидимъ, сложеніе и разложеніе паръ, представленныхъ осями, производится по тѣмъ же самымъ правиламъ, какъ сложеніе и разложеніе силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ.

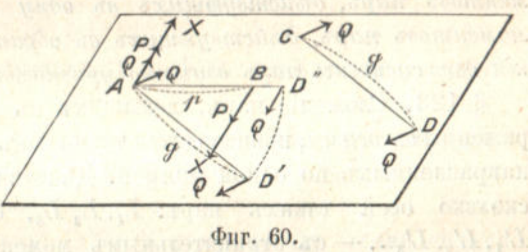
Сложеніе и разложеніе паръ силъ.

§ 121. **Понятіе о равнодѣйствующей парѣ.** Если совокупное дѣйствіе нѣсколькихъ данныхъ паръ можно замѣнить дѣйствіемъ одной пары, то эта послѣдняя называется *равнодѣйствующей парой*, а данныя пары—ея *слагающими* или *составляющими*.

Опредѣленіе по даннымъ слагающимъ парамъ ихъ равнодѣйствующей называется *сложеніемъ паръ*, а обратная задача: замѣной одной данной пары нѣсколькими слагающими парами — *разложеніемъ паръ*.

Слагающія пары могутъ лежать или въ одной плоскости или въ разныхъ плоскостяхъ, которыя могутъ быть или взаимнопараллельными или взаимнопересѣкающимися. Если плоскости паръ взаимно-параллельны, то, какъ извѣстно, всѣ пары можно перенести въ одну плоскость. Итакъ, при сложеніи паръ слѣдуетъ разсмотрѣть только два слѣдующихъ случая: 1) пары лежатъ въ одной плоскости; 2) пары лежатъ въ пересѣкающихся плоскостяхъ.

§ 122. **Сложеніе паръ, лежащихъ въ одной плоскости.** Положимъ, что даны двѣ пары: (P,P) съ плечомъ $AB=p$ и (Q,Q) съ плечомъ $CD=q$, лежащія въ одной плоскости (фиг. 60). Передвинемъ пару (Q,Q) по плоскости параллельно самой себѣ такъ, чтобы конецъ C ея плеча совпалъ съ концомъ A пары (P,P) и затѣмъ повернемъ ее около точки A, чтобы плечо CD совпало по направленію съ плечомъ AB. Наконецъ преобразуемъ пару (Q,Q) въ другую пару (X,X) съ тѣмъ же моментомъ, но съ плечомъ $AB=p$. Сила X опредѣлится по равенству моментовъ



Фиг. 60.

$X.p=Qq$, откуда $X=Q\dfrac{q}{p}$.

Итакъ, мы получимъ двѣ пары (P,P) и (X,X) съ однимъ и тѣмъ же плечомъ $AB=p$. Совокупное дѣйствіе этихъ паръ, очевидно, равно дѣйствію одной пары $(P+X,\ P+X)$ съ тѣмъ же плечомъ.

Моментъ этой равнодѣйствующей пары $=$

$$(P+X)p=\left(P+Q\frac{q}{p}\right).p=Pp+Qq.$$

Весьма понятно, что если бы силы одной изъ паръ были направлены противоположно силамъ другой пары, т.-е. если бы мо-

менты слагающихъ паръ были противоположны между собой по знаку, то моментъ равнодѣйствующей пары равнялся бы

$$(P-X)p=\left(P-Q\frac{q}{p}\right)p=Pp-Qq.$$

Распространивъ выведенное правило на случай сложенія нѣсколькихъ паръ, однѣ изъ которыхъ имѣютъ положительный моментъ, а другія—отрицательный, выскажемъ слѣдующую общую теорему:

Моментъ пары равнодѣйствующей нѣсколькихъ паръ, лежащихъ въ одной плоскости или въ параллельныхъ плоскостяхъ равенъ алгебраической суммѣ моментовъ слагающихъ паръ.

Слѣдствіе. *Если алгебраическая сумма моментовъ паръ, лежащихъ въ одной плоскости, равна нулю, т.-е., если сумма моментовъ паръ, дѣйствующихъ въ одну сторону, равна суммѣ моментовъ паръ, дѣйствующихъ въ обратную сторону, то такія двѣ системы паръ взаимно уравновѣшиваются.*

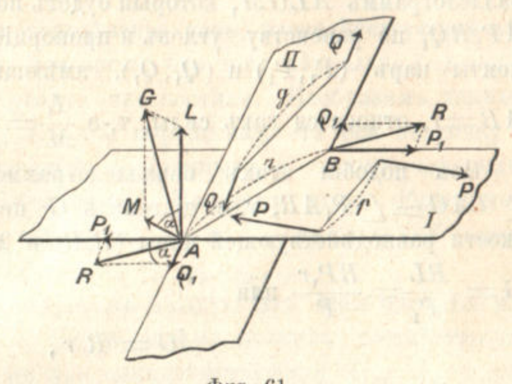
§ 123. Сложеніе паръ, лежащихъ въ одной плоскости и выраженныхъ *осями*, производится точно такъ же, какъ сложеніе силъ, направленныхъ по одной прямой. Дѣйствительно, пусть дано нѣсколько осей такихъ паръ: $L_1, L_2\ L_3$, съ положительнымъ и $L'_1, L'_2, L'_3 \ldots$ — съ отрицательнымъ моментомъ. Передвинувъ всѣ оси параллельно самимъ себѣ въ какую-нибудь одну точку O плоскости паръ, сложимъ сперва оси паръ съ положительнымъ моментомъ, затѣмъ—съ отрицательнымъ и, наконецъ, вычтемъ изъ большей суммы меньшую. Тогда получимъ равнодѣйствующую ось G, причемъ

$$G=L_1+L_2+L_3+\ldots\ldots-L_1-L_2-L_3-\ldots$$

или короче $G=\sum L$.

§ 124. **Сложеніе паръ, лежащихъ въ пересѣкающихся плоскостяхъ.** Даны двѣ пары: (P,P) съ плечомъ p и (Q,Q) съ плечомъ q, лежащія въ пересѣкающихся плоскостяхъ I и II. Преобразуемъ эти пары въ двѣ другія (P_1,P_1) и (Q_1,Q_1) съ общимъ плечомъ $AB=r$, совпадающимъ съ прямою пересѣченія плоскостей. Сложивъ по правилу параллелограмма силы P_1 и Q_1, приложенныя въ точкѣ A, а затѣмъ силы P_1 и Q_1, приложенныя въ точкѣ B, получимъ вмѣсто двухъ паръ (P_1,P_1) и (Q_1,Q_1) одну

равнодѣйствующую пару (R, R) съ тѣмъ же плечомъ $AB = r$, но лежащую въ третьей плоскости, положеніе которой не трудно опредѣлить. Такъ какъ силы P_1 и Q_1 лежатъ въ плоскости I и II и перпендикулярны къ своему плечу AB, то, слѣдовательно, уголъ α между этими силами есть линейный уголъ двуграннаго угла между плоскостями I и II. Точно также углы $\angle(P_1, R)$ и $\angle(Q_1, R)$ между силами P_1 и Q_1 и ихъ равнодѣйствующей R суть линейные углы двугранныхъ угловъ, образуемыхъ плоскостями I и II съ плоскостью равнодѣйствующей пары $(R_1 R)$.



Фиг. 61.

Отсюда заключаемъ, что плоскость равнодѣйствующей пары дѣлитъ уголъ между плоскостями слагающихъ паръ точно такъ же, какъ діагональ параллелограмма, построеннаго на силахъ P_1 и Q_1, какъ на сторонахъ, дѣлитъ уголъ между этими силами.

Извѣстно, что

$$R^2 = P_1{}^2 + Q_1{}^2 + 2P_1 Q_1 \cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Силы P_1 и Q_1, полученныя при преобразованіи паръ (P, P) и (Q, Q) опредѣлятся по равенству моментовъ $Pp = P_1 r$ и $Qq = Q_1 r$, откуда $P_1 = P\frac{p}{r}$ и $Q_1 = Q\frac{q}{r}$.

Подставивъ эти величины въ равенство (1), получимъ:

$$R^2 = P^2\frac{p^2}{r^2} + Q^2\frac{q^2}{r^2} + 2P\frac{p}{r}Q\frac{q}{r}\cos\alpha$$

или

$$(Rr)^2 = (Pp)^2 + (Qq)^2 + 2PpQq\cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

т.-е. аналитическое выраженіе момента пары, равнодѣйствующей двухъ паръ, лежащихъ въ пересѣкающихся плоскостяхъ, одинаково съ выраженіемъ величины, равнодѣйствующей двухъ сходящихся силъ.

§ 125. Построивъ въ точкѣ A оси $L = P_1 r$ и $M = Q_1 r$ паръ (P_1, P_1) и (Q_1, Q_1) и замѣтивъ, что уголъ $LAM = \alpha$, какъ уголъ между перпендикулярами къ плоскостямъ I и II, построимъ параллелограммъ $ALGM$, который будетъ подобенъ параллелограмму AP_1RQ_1 по равенству угловъ и пропорціональности сторонъ (моменты паръ (P_1, P_1) и (Q_1, Q_1), имѣющихъ одно общее плечо $AB = r$, относятся какъ силы, т.-е. $\frac{L}{M} = \frac{P_1}{Q_1}$).

Изъ подобія этихъ параллелограммовъ находимъ, что 1) $\angle LAG = \angle P_1AR$, т.-е. діагональ G перпендикулярна къ плоскости равнодѣйствующей пары (R, R) и 2) $G : L = R : P_1$, откуда $G = \frac{RL}{P_1} = \frac{RP_1 r}{P}$ или

$$G = R.r,$$

т.-е. діагональ G представляетъ ничто иное, какъ ось равнодѣйствующей пары.

Итакъ, *ось пары, равнодѣйствующей двухъ паръ, лежащихъ въ пересѣкающихся плоскостяхъ, по величинѣ и направленію равни діагонали параллелограмма, построеннаго на осяхъ составляющихъ паръ, какъ на сторонахъ.*

Отсюда понятно что равенство (2) можно написать въ такомъ видѣ:

$$G^2 = L^2 + M^2 + 2LM \cos \alpha \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

§ 126. **Многоугольникъ паръ и параллелепипедъ паръ.** Установивъ такимъ образомъ, что сложеніе паръ, изображенныхъ ихъ осями, производится совершенно такъ же какъ и сложеніе силъ, дѣйствующихъ на одну точку, легко выведемъ двѣ слѣдующія теоремы:

1. *Ось пары, равнодѣйствующей нѣсколькихъ паръ, лежащихъ въ какихъ угодно плоскостяхъ, равна по величинѣ и направленію замыкающей сторонѣ многоугольника, построеннаго на осяхъ составляющихъ паръ, какъ на сторонахъ.* (Теорема многоугольника паръ.

2. *Ось пары, равнодѣйствующей трехъ паръ, лежащихъ въ трехъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ, равна по величинѣ и направленію діагонали параллелепипеда, построеннаго на осяхъ составляющихъ паръ, какъ на ребрахъ.* (Теорема параллелепипеда паръ).

Если назовемъ оси составляющихъ паръ черезъ L, M и N, а ось равнодѣйствующей пары черезъ G, то

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

§ 127. **Аналитическое опредѣленіе пары, равнодѣйствующей нѣсколькихъ данныхъ паръ.** Положимъ, что дано нѣсколько *(n)* паръ, лежащихъ въ какихъ угодно плоскостяхъ. Изобразимъ данныя пары ихъ осями L_1, L_2, $L_3 \ldots$ и перенесемъ эти оси въ точку O пересѣченія трехъ произвольно выбранныхъ и взаимно-перпендикулярныхъ осей OX, OY и OZ. Назовемъ углы, образуемые осями паръ съ осью OX, черезъ α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots$, съ осью OY черезъ β_1, β_2, $\beta_3 \ldots$, съ осью OZ черезъ γ_1, γ_2, $\gamma_3 \ldots$.

Разложивъ или спроектировавъ каждую изъ осей паръ на направленіе осей OX, OY и OZ и затѣмъ сложивъ составляющія, идущія по каждой оси, въ три равнодѣйствующія G_x, G_y и G_z, получимъ, что

$$G_x = L_1 cos\alpha_1 + L_2 cos\alpha_2 + L_3 cos\alpha_3 + \ldots = \sum_1^n L cos\alpha$$
$$G_y = L_1 cos\beta_1 + L_2 cos\beta_2 + L_3 cos\beta_3 + \ldots = \sum_1^n L cos\beta$$
$$G_z = L_1 cos\gamma_1 + L_2 cos\gamma_2 + L_3 cos\gamma_3 + \ldots = \sum_1^n L cos\gamma$$

Наконецъ сложивъ по правилу параллелепипеда составляющія G_x, G_y и G_z, получимъ искомую равнодѣйствующую G всѣхъ данныхъ паръ, причемъ

$$G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Углы α, β, γ, образуемые осью равнодѣйствующей пары съ осями OX, OY, OZ, опредѣляются уравненіями

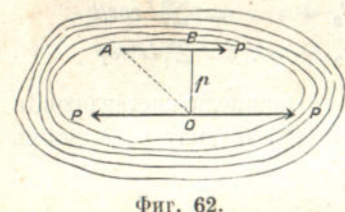
$$cos\alpha = \frac{G_x}{G};\ cos\beta = \frac{G_y}{G};\ cos\gamma = \frac{G_z}{G} \ \ldots \quad (2).$$

§ 128. **Разложеніе паръ.** Такъ какъ моменты паръ, приложенныхъ къ одному и тому же плечу, относятся какъ силы, то отсюда понятно, что разложеніе одной пары на *двѣ* составляющія пары сводится къ задачѣ разложенія силы по способу параллелограмма, разложеніе пары на *три* составляющія пары, лежащія въ трехъ различныхъ плоскостяхъ—къ разложенію силы по способу параллелепипеда, наконецъ разложеніе пары на нѣсколько составляющихъ паръ—къ разложенію силы по правилу многоугольника.

Въ особенности просто производятся эти разложенія, если пары изображены осями, такъ какъ въ этомъ случаѣ имѣемъ задачи, вполнѣ тождественныя съ извѣстными уже задачами о разложеніи сходящихся силъ. Само собою разумѣется, что каждую изъ разложенныхъ паръ можно преобразовать въ другую при помощи параллельнаго перенесенія, вращенія и замѣны одного плеча другимъ, если это требуется условіями задачи.

§ 129. **Параллельное перенесеніе силы. Разложеніе силы на силу и пару.** Въ заключеніе сказаннаго о парахъ силъ докажемъ слѣдующую весьма важную теорему: *Всякую силу, приложенную къ нѣкоторой точкѣ тѣла, можно перенести параллельно ея направленію въ другую произвольно взятую точку того же тѣла, причемъ однако является пара съ моментомъ, равнымъ произведенію данной силы на кратчайшее разстояніе ея отъ выбранной точки.*

Положимъ, что дана нѣкоторая сила P, приложенная къ точкѣ A (фиг. 62). Приложимъ въ какой-нибудь другой точкѣ O того же тѣла двѣ противоположныя силы P и P, равныя и параллельныя данной силѣ, вслѣдствіе чего никакого измѣненія въ состояніи тѣла не произойдетъ. Но три силы P, P, P можно разсматривать, какъ совокупность одной силы P, приложенной къ точкѣ O, и пары (P, P) съ моментомъ $= P.OB = Pp$, что и слѣдовало доказать.



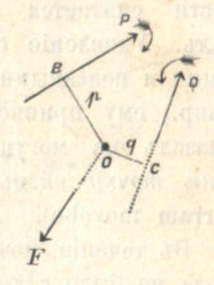
Фиг. 62.

Эта теорема имѣетъ существенное значеніе для рѣшенія вопроса о сложеніи системы силъ, какъ угодно приложенныхъ къ различнымъ точкамъ тѣла, а слѣдовательно, и для рѣшенія основной задачи статики: опредѣленію условій равновѣсія твердаго тѣла, подверженнаго дѣйствію какихъ угодно силъ.

О моментахъ силъ.

§ 130. **Статическій моментъ.** Моментъ Pp пары, получившейся при перенесеніи силы P въ точку O (фиг. 62), носитъ названіе *момента силы относительно точки* или *статическаго момента силы.*

Надо замѣтить. что понятіе о статическомъ моментѣ принадлежитъ гораздо болѣе раннему времени, чѣмъ понятіе о парѣ силъ, введенному въ науку Пуансо лишь въ 1803 году. Моментъ силы P относительно точки O (фиг. 63), т.-е. произведеніе изъ величины силы на перпендикуляръ, опущенный изъ точки на направленіе силы, разсматривается, какъ самостоятельная причина вращательнаго движенія тѣла вокругъ этой точки. Точка O получила названіе *центра* момента, а перпендикуляръ $OB = p$ — *плеча* момента.

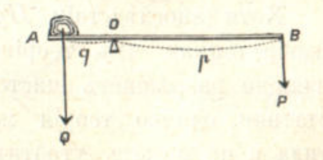


Фиг. 63.

Статическій моментъ измѣряется такими же единицами мѣръ какъ и моментъ пары силъ (килограммо-метрами или пудо-футами); численная величина момента равна величинѣ удвоенной площади $\triangle$-ка, основаніе котораго равно данной силѣ P, а высота—плечу ея p. Моменту силы приписывается положительное или отрицательное значеніе, смотря по тому, въ какую сторону происходитъ вращеніе: по направленію движенія часовой стрѣлки ($+Pp$) или по обратному направленію ($-Qq$).

Понятно, что моментъ силы, направленіе которой проходитъ черезъ центръ моментовъ (напр. силы F), равенъ нулю, такъ какъ плечо этой силы равно нулю.

§ 131. **Происхожденіе понятія о моментѣ силы относительно точки,** какъ о причинѣ вращательнаго движенія, принадлежитъ къ самой отдаленной древности. Надо думать, что первоначальнымъ источникомъ этого понятія былъ простѣйшій *законъ рычага*, состоящій въ томъ, что производимое рычагомъ дѣйствіе измѣряется произведеніемъ Pp силы P, приложенной къ нему перпендикулярно, на плечо p (фиг. 64).



Фиг. 64.

Этотъ законъ несомнѣнно былъ открытъ человѣкомъ чисто практическимъ путемъ въ самую первобытную эпоху. Первый, кто съ научной точки зрѣнія началъ разрабатывать теорію рычага и основанную на ней теорію простыхъ машинъ (блокъ, воротъ, полиспастъ), былъ величайшій механикъ древности *Архимедъ*

(287—212 г. до Р. Х.), положившій въ основаніе своихъ разсужденій аксіому: двѣ равныя и параллельныя силы, перпендикулярно приложенныя къ концамъ подпертаго въ серединѣ рычага, взаимно уравновѣшиваются. Архимедъ по справедливости считается основателемъ статики твердыхъ и жидкихъ тѣлъ. Удивленіе современниковъ передъ его знаніями, открытіями и полезными изобрѣтеніями создало массу легендъ. Такъ, напр., ему приписывается знаменитое изреченіе, которымъ онъ указалъ на могущественное дѣйствіе момента рычага: *Дайте мнѣ точку опоры и я поверну землю*! (Date mihi punctum,— terram movebo).

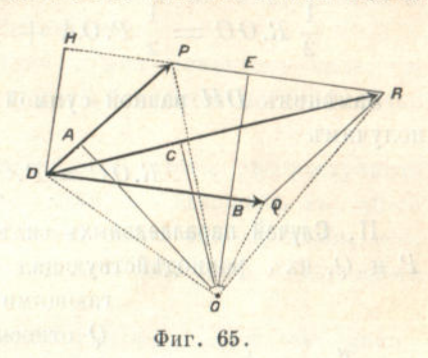
Въ теченіе почти 1800 лѣтъ, слѣдовавшихъ за эпохой Архимеда, не было сдѣлано ни одного крупнаго шага въ области механики вообще и статики въ частности. Первымъ толчкомъ, выведшимъ науку изъ этого состоянія оцѣпенѣнія, были труды геніальнаго итальянца *Леонардо да Винчи (1452—1519)*, указавшаго, что моментъ силы, приложенной наклонно къ рычагу, равенъ произведенію изъ силы на перпендикуляръ, опущенный на ея направленіе изъ точки опоры. Слѣдовавшій за нимъ великій *Галилей (1564—1642)* основалъ новый отдѣлъ механики, а именно *динамику*. Наиболѣе подробное развитіе *статика* получила лишь въ трудахъ французскаго ученаго *Петра Вариньона (1654—1722)*, впервые разработавшаго ученіе о моментахъ силъ и установившаго теорію равновѣсія, основанную на сложеніи силъ и моментовъ.

Хотя впослѣдствіи *Пуансо (1777 — 1859)* и доказалъ, что изобрѣтенная имъ теорія паръ силъ наиболѣе естественно и изящно разрѣшаетъ чисто геометрическимъ путемъ всѣ задачи статики, однако теорія моментовъ силъ до сихъ поръ не утратила и не можетъ утратить своего значенія, такъ какъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ (въ особенности въ области прикладной механики) она рѣшаетъ болѣе просто и доступно многіе вопросы, связанные съ равновѣсіемъ тѣлъ.

Вслѣдствіе этого представляется полезнымъ изложить здѣсь самостоятельно важнѣйшія теоремы, касающіяся моментовъ силъ, хотя, повторяемъ, эти теоремы или уже были выведены въ теоріи паръ силъ (только въ другой формѣ), или могутъ быть изъ нея выведены.

§ 132. **Теорема Вариньона.** *Моментъ равнодѣйствующей силъ относительно какой-либо точки равенъ алгебраической суммѣ моментовъ составляющихъ относительно той же самой точки.*

I. **Случай сходящихся силъ.** Даны двѣ сходящіяся силы P и Q, ихъ равнодѣйствующая R и нѣкоторая произвольно взятая точка O, лежащая внѣ угла PDQ между слагающими (фиг. 65). Опустивъ изъ точки O перпендикуляры OA, OB и OC на направленіе силъ P, Q и R, замѣтимъ, что при данномъ положеніи точки O моменты силъ P и Q имѣютъ одинаковые, а именно положительные знаки. Требуется доказать, что $R.OC = P.OA + Q.OB$ или $Мом.\ R = Мом.\ P + Мом.\ Q$. Соединивъ точку O съ концами силъ P, Q и R, находимъ изъ чертежа, что



Фиг. 65.

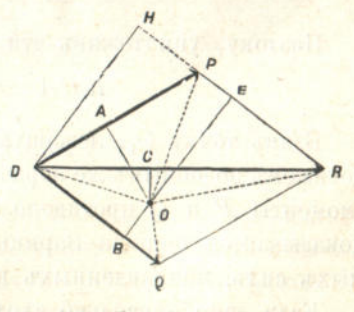
$$\triangle ODR = \triangle ODP + \triangle OPR - \triangle DPR, \text{ или}$$

$$\frac{1}{2} R.OC = \frac{1}{2} P.OA + \frac{1}{2} Q(OB + BE) - \frac{1}{2} Q.DH.$$

Замѣтивъ, что $DH = BE$, раскрывъ скобки и сокративъ, получимъ:

$$R.OC = P.OA + Q.OB.$$

Если точка O лежитъ *внутри* угла PDQ между слагающими P и Q (фиг. 66), то, какъ видно изъ чертежа, моменты слагающихъ относительно этой точки имѣютъ противоположные знаки.



Фиг. 66.

Въ данномъ случаѣ моментъ силы P—положительный, а моментъ силы Q — отрицательный. Слѣдовательно, здѣсь слѣдуетъ доказать, что

$$R.OC = P.OA - Q.OB \text{ или } Мом.\ R = Мом.\ P - Мом.\ Q.$$

Соединивъ точку O съ концами силъ, изъ чертежа находимъ, что

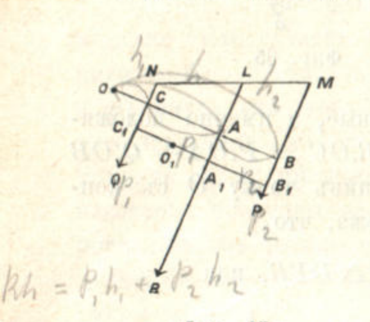
$$\triangle ODR = \triangle ODP + \triangle OPR - \triangle DPR \text{ или}$$

$$\frac{1}{2}\, R.OC = \frac{1}{2}\, P.OA + \frac{1}{2}\, Q.OE - \frac{1}{2}\, Q.DH.$$

Замѣнивъ DH равной суммой $BO + OE$ и сдѣлавъ упрощенія, получимъ

$$R.OC = P.OA - Q.OB.$$

II. **Случай параллельныхъ силъ.** Даны двѣ параллельныя силы P и Q, ихъ равнодѣйствующая R и точка O, лежащая за слагающими (фиг. 67). Моменты силъ P и Q относительно нея—оба положительные. Слѣдовательно, требуется доказать, что



Фиг. 67.

$$R.OA = P.OB + Q.OC.$$

Нетрудно видѣть, что

$$R.OA = (P+Q)\ OA = P.OA + Q.OA =$$
$$= P(OB - AB) - Q(AC + OC) =$$
$$= P.OB - P.AB + Q.AC + Q.OC.$$

Но $P.AB = Q.AC$, такъ какъ

$$\frac{P}{Q} = \frac{LN}{LM} = \frac{AC}{AB}.$$

Поэтому, уничтоживъ эти члены, получимъ

$$R.OA = P.OB + Q.OC.$$

Взявъ точку O_1, лежащую между слагающими P и Q, легко докажемъ подобнымъ же образомъ, что $R.\,O_1A_1 = P.O_1B_1 - Q.O_1C_1$ (моменты P и Q противоположны по знакамъ). Точно такъ же доказывается теорема Вариньона и для случая двухъ параллельныхъ силъ, направленныхъ въ разныя стороны.

Если дано нѣсколько сходящихся или параллельныхъ силъ, то, примѣняя теорему послѣдовательно къ каждымъ двумъ силамъ, безъ труда убѣдимся въ ея справедливости и для этого общаго случая.

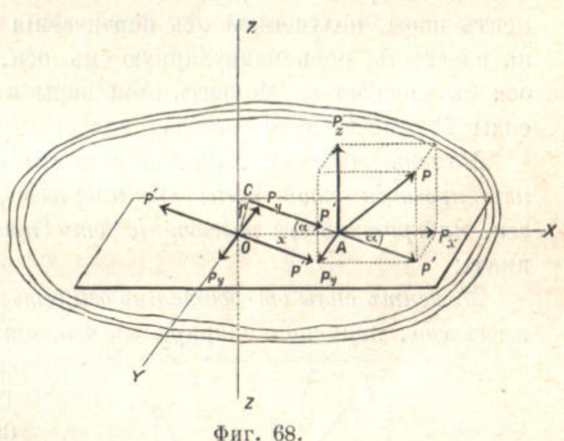
Такимъ образомъ теорема Вариньона примѣняется для сложенія моментовъ произвольнаго числа силъ, какъ угодно расположенныхъ въ одной плоскости.

Задачи. 1. Показать, что моменты двухъ слагающихъ силъ относительно точки, лежащей на направленіи ихъ равнодѣйствующей, равны по величинѣ и противоположны по направленію и, слѣдовательно, взаимно уравновѣшиваются.

2. Показать, что алгебраическая сумма моментовъ силъ, составляющихъ пару, равна моменту пары относительно любой точки ея плоскости.

§ 133. **Моментъ силы относительно оси.** Чтобы распространить теорему Вариньона для моментовъ силъ, не лежащихъ въ одной плоскости, введено понятіе *о моментѣ силы относительно оси.* Происхожденіе этого понятія можетъ быть объяснено слѣдующимъ образомъ.

Положимъ, что къ тѣлу, имѣющему неподвижную ось вращенія ZZ, приложена къ точкѣ A нѣкоторая сила P (фиг. 68). Если направленіе AP этой силы лежитъ въ одной плоскости съ осью ZZ, то дѣйствіе силы уничтожится сопротивленіемъ неподвижной оси; если же прямыя AP и ZZ не лежатъ въ одной плоскости, то тѣло начнетъ вращаться около оси.



Фиг. 68.

Чтобы опредѣлит ближе причину этого вращенія, разложимъ силу P по правилу параллелепипеда на три взаимно перпендикулярныя слагающія P_x, P_y и P_z такъ, чтобы P_x и P_y лежали въ плоскости XOY, перпендикулярной къ оси ZZ, причемъ P_x была бы направлена перпендикулярно къ оси, P_y была бы перпендикулярна къ плоскости, проходящей черезъ точку A и ось ZZ, а слагающая P_z была бы параллельна оси. Очевидно, что сила P_x стремится удалить тѣло отъ оси, а сила P_z —двигать тѣла вдоль оси, но такъ какъ ось неподвижна и неизмѣнно соединена съ тѣломъ, то обѣ эти силы уничтожаются сопротивленіемъ оси и никакого движенія не произведутъ. Остается только одна сила P_y. Если перенесемъ ее

параллельно самой себѣ въ точку O пересѣченія оси ZZ съ перпендикулярной къ ней плоскостью, то получимъ силу P_y, дѣйствіе которой выразится только въ давленіи на ось, и пару (P_y, P_y) съ плечомъ $OA = x$, которая и будетъ вращать наше тѣло моментомъ $P_y . x$.

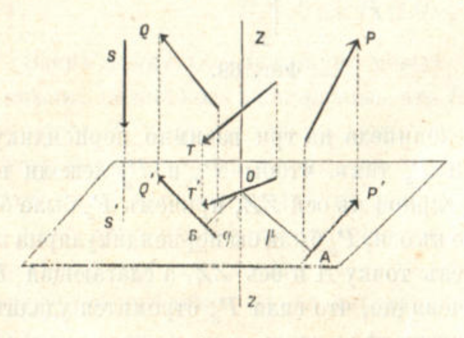
Легко однако видѣть, что дѣйствіе этой пары равносильно дѣйствію пары (P', P') съ плечомъ $OC = p$, полученной при перенесеніи въ ту же точку O силы P' равнодѣйствующей силъ P_x и P_y и представляющей *проекцію данной силы P на плоскость, перпендикулярную къ оси.*

Дѣйствительно, такъ какъ $P_y = P' sina$, а $OC = OA . sina$, откуда $x = \frac{p}{sina}$, то моментъ $P_y . x = P' sina . \frac{p}{sina} = P'p$.

Итакъ, причиной вращенія тѣла около оси можно считать моментъ пары, полученной отъ перенесенія проекціи данной силы на плоскость, перпендикулярную къ оси, въ точку пересѣченія оси съ плоскостью. Моментъ этой пары и называется моментомъ силы P относительно оси, или иначе:

Моментомъ силы относительно оси называется произведеніе изъ проекціи этой силы на плоскость, перпендикулярную къ оси, на кратчайшее разстояніе отъ проекціи до оси, или еще иначе:

Моментъ силы относительно оси есть моментъ ея проекціи на плоскость, перпендикулярную къ оси, относительно точки пересѣченія оси съ плоскостью.



Фиг. 69.

Такимъ образомъ (фиг. 69) моментъ силы P относительно оси ZZ есть произведеніе $P'.OA = P'p$, а моментъ силы Q есть произведеніе $Q'.OB = Q'q$. При этомъ, согласно принятому ранѣе условію, первый моментъ будемъ считать отрицательнымъ, а второй положительнымъ.

Если данная сила лежитъ въ одной плоскости съ осью, то моментъ ея относительно оси равенъ нулю. Дѣйстви-

тельно въ этомъ случаѣ сила, или, 1) будетъ *параллельна* оси напр. сила S), но тогда проекція ея обращается въ точку, или 2) будетъ *пересѣкаться съ осью* (напр. сила T), но тогда проекція ея пересѣчетъ ось и, слѣдовательно, плечо ея будетъ равно нулю.

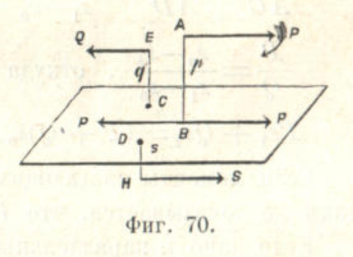
§ 134. **Теорема моментовъ силъ относительно оси**. *Моментъ равнодѣйствующей относительно оси равенъ алгебраической суммѣ моментовъ составляющихъ относительно той же самой оси.*

Эта теорема, представляющая распространеніе теоремы Вариньона для моментовъ силъ, не лежащихъ въ одной плоскости, доказывается точно такъ же, какъ эта послѣдняя (§ 132), для чего достаточно замѣтить, что

1) моменты силъ относительно оси представляютъ моменты ихъ проекцій относительно точки пересѣченія оси съ перпендикулярной къ ней плоскостью и

2) проекціи параллельныхъ линій на плоскость параллельны между собой, такъ, что напр., проекція параллелограмма $DPRQ$ сходящихся силъ представляетъ также параллелограммъ $dprq$.

§ 135. **Моментъ силы относительно плоскости**. Если силу P перенесемъ на нѣкоторую *параллельную ей* плоскость (фиг. 70), то получимъ силу P и пару (P,P) съ плечомъ $AB=p$. Моментъ этой пары и называется *моментомъ силы относительно плоскости*. Другими словами, *моментъ силы относительно плоскости есть произведеніе изъ величины силы на разстояніе отъ точки A приложенія ея до этой плоскости.*

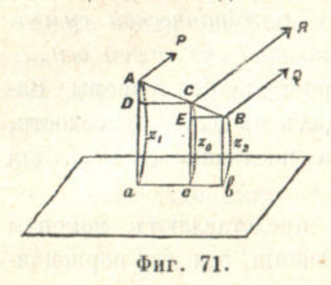


Фиг. 70.

Если сила стремится вращать свое плечо по направленію часовой стрѣлки, то моментъ ея относительно плоскости считается положительнымъ, а въ противномъ случаѣ—отрицательнымъ. Поэтому моментъ силъ (P и Q), направленныхъ въ разныя стороны, а также силъ (P и S), направленныхъ въ одну сторону, но лежащихъ по обѣ стороны плоскости моментовъ, будутъ противоположны по знаку.

§ 136. **Теорема моментовъ параллельныхъ силъ относительно плоскости**. При сложеніи моментовъ параллельныхъ силъ относительно плоскости также имѣетъ силу теорема Вариньона:

Моментъ равнодѣйствующей равенъ алгебраической суммѣ моментовъ, составляющихъ относительно одной и той же плоскости. Справедливость этой теоремы прямо слѣдуетъ изъ того что моменты такихъ силъ суть ничто иное какъ моменты паръ, лежащихъ въ одной плоскости или въ параллельныхъ плоскостяхъ, а аналогичная теорема сложенія такихъ паръ была уже доказана (§122).



Фиг. 71.

Докажемъ, впрочемъ, эту теорему, независимо отъ теоремъ сложенія паръ.

Положимъ, что даны двѣ параллельныя силы P и Q и равнодѣйствующая ихъ R, точки приложенія ихъ пусть будутъ A, B и C, а плечи $Aa = z_1$, $Bb = z_2$ и $Cc = z_0$ (фиг. 71). Проведемъ прямыя BE и CD, параллельныя прямой ab.

Изъ сложенія параллельныхъ силъ извѣстно, что

$\frac{P}{Q} = \frac{BC}{AC}$. Но изъ подобныхъ $\triangle$-ковъ BCE и ACD имѣемъ,

что $\frac{BC}{AC} = \frac{CE}{AD} = \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_0}$. Итакъ

$$\frac{P}{Q} = \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_0}, \text{ откуда } Pz_1 - Pz_0 = Qz_0 - Qz_2 \text{ или}$$

$$Pz_1 + Qz_2 = (P + Q)z_0 \text{ или наконецъ } Rz_0 = Pz_1 + Qz_2$$

Если моменты слагающихъ противоположны по знаку, то точно такъ же доказывается, что $Rz_0 = Pz_1 - Qz_2$.

Если дано n параллельныхъ силъ $F_1, F_2, F_3 \ldots F_n$, то, складывая послѣдовательно сперва двѣ изъ нихъ, затѣмъ равнодѣйствующую ихъ и 3-ю силу и т. д., безъ труда распространимъ нашу теорему на случай произвольнаго числа силъ.

Если дано n параллельныхъ силъ $F_1, F_2, F_3, \ldots F_n$ и разстоянія (координаты) ихъ отъ нѣкоторой плоскости $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$, то, обозначивъ разстояніе отъ той же плоскости точки приложенія равнодѣйствующей R черезъ x_0, можемъ написать, что

$$Rx_0 = F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3 + \ldots + F_nx_n = \sum Fx,$$

$$\text{откуда } x_0 = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + \ldots F_nx_n}{R} = \frac{\sum Fx}{R},$$

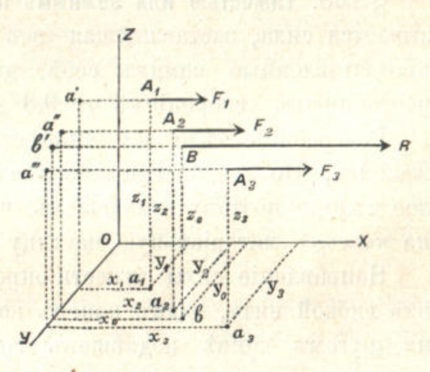
или, замѣтивъ, что $R = F_1 + F_2 + \ldots + F_n = \Sigma F$,

$$x_0 = \frac{\Sigma Fx}{\Sigma F},$$

т.-е. разстояніе точки приложенія равнодѣйствующей отъ плоскости моментовъ равно частному отъ дѣленія алгебраич. суммы моментовъ слагающихъ на алгебраич. сумму слагающихъ.

Примѣчаніе. Сложеніе моментовъ сходящихся силъ относительно плоскости представляетъ, какъ легко видѣть, ничто иное, какъ сложеніе паръ, лежащихъ въ пересѣкающихся плоскостяхъ, и, слѣдовательно, производится по правилу параллелограмма.

§ 137. **Аналитическое опредѣленіе центра параллельныхъ силъ.** Положимъ, что дано n параллельныхъ силъ $F_1, F_2, F_3, \ldots F_n$ (фиг. 72). Мы только что вывели, какъ опредѣляется положеніе точки приложенія ихъ равнодѣйствующей или такъ называемаго *центра параллельныхъ силъ* относительно какой-нибудь плоскости. Чтобы найти положеніе этой точки въ пространствѣ, надо опредѣлить координаты (разстоянія) ея отъ трехъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей, положеніе которыхъ извѣстно. Проведемъ три координатныя плоскости XOY, XOZ и YOZ такъ,



Фиг. 72.

чтобы прямая OX пересѣченія первыхъ двухъ плоскостей была параллельна общему направленію данныхъ силъ. Такимъ образомъ эти силы будутъ одновременно *параллельны* плоскостямъ XOY и XOZ. Называя координаты (разстоянія) слагающихъ силъ

относительно плоскости XOY черезъ $z_1, z_2, \ldots z_n$

„ „ XOZ „ $y_1, y_2, \ldots y_n$

„ „ YOZ „ $x_1, x_2, \ldots x_n$

а координаты искомаго центра параллельныхъ силъ черезъ x_0, y_0 и z_0, на основаніи теоремы моментовъ силъ относительно плоскостей XOY и XOZ можемъ написать равенства:

$$z_0 \cdot \Sigma F = F_1 z_1 + F_2 z_2 + \ldots + F_n z_n = \Sigma Fz \quad \ldots \quad (1)$$

$$y_0 \cdot \Sigma F = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \ldots + F_n y_n = \Sigma Fy \quad \ldots \quad (2)$$

Повернемъ слагающія F_1, F_2, . . . F_n около ихъ точекъ приложенія на 90° такъ, чтобы онѣ приняли положеніе параллельное плоскости YOZ, вслѣдствіе чего, какъ извѣстно, положеніе центра ихъ не измѣнится. Теперь мы можемъ написать относительно этой плоскости 3-ье уравненіе моментовъ:

$$x_0 \cdot \Sigma F = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \ldots + F_n x_n = \Sigma Fx \quad \ldots \quad (3)$$

Изъ уравненій (1), (2), и (3) получимъ формулы, опредѣляющія положеніе центра параллельныхъ силъ

$$x_0 = \frac{\Sigma Fx}{\Sigma F};\ y_0 = \frac{\Sigma Fy}{\Sigma F};\ z_0 = \frac{\Sigma Fz}{\Sigma F} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

О центрѣ тяжести.

§ 138. **Тяжестью или земнымъ притяженіемъ**, какъ извѣстно, называется сила, заставляющая всѣ свободные земные предметы, предоставленные самимъ себѣ, двигаться внизъ или падать съ постояннымъ ускореніемъ g=9,8 м.=32,2 ф.

Раздробивъ тѣло на множество мелкихъ частицъ, мы убѣждаемся, что эти частицы падаютъ совершенно такъ же, какъ цѣлое тѣло, и поэтому заключаемъ, что притяженіе земли дѣйствуетъ на *каждую* матеріальную частицу тѣла.

Направленіе силы тяжести опредѣляется *отвѣсомъ*, состоящимъ изъ гибкой нити, одинъ конецъ которой неподвижно укрѣпленъ, а на другомъ концѣ подвѣшенъ грузъ. Подъ дѣйствіемъ тяжести груза нить вытягивается въ прямую линію по направленію, называемому *отвѣснымъ* или *вертикальнымъ*, которое и представляетъ направленіе силы тяжести.

Наблюденія показали, что вертикальное направленіе во всѣхъ точкахъ земного шара перпендикулярно или, правильнѣе сказать, *нормально* къ свободной поверхности жидкости, а такъ какъ свободная поверхность жидкости, разсматриваемой въ большихъ массахъ (моря, океаны), имѣетъ шарообразный видъ, то, принимая землю за правильный шаръ, можемъ заключить, что направленія силъ тяжести, приложенныхъ къ различнымъ тѣламъ или къ различнымъ точкамъ одного тѣла, пересѣкаются въ центрѣ земли *).

*) Это заключеніе только приблизительно вѣрно, такъ какъ земля не есть правильный шаръ, а *сфероидъ* (шарообразное тѣло), сжатый у полюсовъ и растянутый у экватора.

Вслѣдствіе большой удаленности этой точки отъ земной поверхности (радіусъ земли приблизительно равенъ 6000 верстамъ) и сравнительно малыхъ размѣровъ земныхъ тѣлъ, углы, составленные направленіями силъ тяжести различныхъ частицъ одного и того же тѣла, весьма малы. Такъ напр., радіусы, проведенные изъ центра земли къ двумъ точкамъ, находящимся на земной поверхности въ разстояніи 1 метра одна отъ другой, составляютъ уголъ въ 0,03″ или въ $\frac{1}{10.800.000}$ часть прямого угла. Поэтому почти безъ погрѣшности можно считать, что направленія силъ тяжести частей одного и того же тѣла параллельны между собою.

§ 139. **Центръ тяжести**. Равнодѣйствующая параллельныхъ силъ тяжести всѣхъ частицъ одного и того же тѣла равна, какъ извѣстно, суммѣ ихъ и представляетъ *вѣсъ* этого тѣла, точка же приложенія этой равнодѣйствующей или центръ параллельныхъ силъ тяжести называется *центромъ тяжести* тѣла. Такимъ образомъ можно считать, что вѣсъ всего тѣла сосредоточенъ въ его центрѣ тяжести.

По свойству центра параллельныхъ силъ (§ 109) центръ тяжести тѣла находится въ одной опредѣленной точкѣ и не измѣняетъ этого положенія при измѣненіи положенія самого тѣла *).

Приложивъ къ центру тяжести силу, равную и противоположную его вѣсу, мы *уравновѣсимъ* тѣло **). Отсюда слѣдуетъ, что если подпереть или подвѣсить тѣло въ его центрѣ тяжести, то оно останется въ равновѣсіи при любомъ своемъ положеніи. Точно также мы можемъ сдѣлать и обратное заключеніе: если какая либо сила уравновѣшиваетъ тѣло, на которое не дѣйствуютъ никакія другія силы кромѣ его собственнаго вѣса, то эта сила непремѣнно проходитъ черезъ центръ тяжести тѣла.

§ 140. **Центры тяжести объемовъ, поверхностей, площадей и линій**. Опредѣленіе положенія центровъ тяжести представляетъ

*) Въ нѣкоторыхъ случаяхъ (кольцо, полый шаръ и проч.) центръ тяжести представляетъ воображаемую точку, занимающую опредѣленное положеніе, но не связанную непосредственно съ тѣломъ.

**) Этотъ фактъ, вѣроятно, и былъ первоначальнымъ поводомъ къ образованію самаго слова *равновѣсіе*, принявшаго впослѣдствіи гораздо болѣе общее значеніе.

одну изъ важнѣйшихъ задачъ механики, рѣшаемую, смотря по обстоятельствамъ вопроса, или аналитически, или геометрически, или, наконецъ, путемъ опыта. Для упрощенія мы будемъ опредѣлять центры тяжести *однородныхъ* тѣлъ, при чемъ замѣтимъ, что если одно измѣреніе разсматриваемаго тѣла весьма мало сравнительно съ другими его измѣреніями (какъ напр., въ случаѣ тонкаго листа), то такое тѣло разсматриваютъ, какъ *матеріальную площадь* или *поверхность*, а если два измѣренія тѣла очень малы, сравнительно съ третьимъ (напр., въ случаѣ тонкой проволоки), то такое тѣло разсматриваютъ, какъ *матеріальную линію*. Въ этомъ смыслѣ употребляютъ (хотя и не вполнѣ правильно) названіе: *центръ тяжести площади*, *поверхности*, *линіи*, *периметра фигуры* и проч.

§ 141. **Аналитическое опредѣленіе центровъ тяжести.** Пусть $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ — вѣса частей, составляющихъ данное тѣло; $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots x_n, y_n, z_n$ — координаты этихъ частицъ или ихъ центровъ тяжестей (если эти части не очень малы); $P = p_1 + p_2 \ldots + p_n = \Sigma p$ — вѣсъ всего тѣла и x_0, y_0, z_0 — координаты его центра тяжести относительно тѣхъ же самыхъ плоскостей YOZ, XOZ и XOY.

На основаніи теоремы моментовъ параллельныхъ силъ относительно плоскости имѣемъ: *моментъ вѣса всего тѣла относительно какой угодно плоскости равенъ суммѣ моментовъ вѣсовъ его частей относительно той же самой плоскости*

т.-е. $Px_0 = \Sigma px;\ Py_0 = \Sigma py;\ Pz_0 = \Sigma pz$ . . . . (1)

откуда $x_0 = \dfrac{\Sigma px}{P};\ y_0 = \dfrac{\Sigma py}{P};\ z_0 = \dfrac{\Sigma pz}{P}$ . . . . . . (2)

Обозначивъ вѣсъ кубической единицы тѣла черезъ d, а объемы тѣла и его частей черезъ $V, v_1, v_2 \ldots v_n$, изъ ур-ій (1) получимъ, что

$$Vdx_0 = \Sigma vdx;\ Vdy_0 = \Sigma vdy;\ Vdz_0 = \Sigma vdz$$

Выведя d, какъ постояннаго множителя, за знакъ Σ и сократимъ на него полученныя уравненія, будемъ имѣть:

$Vx_0 = \Sigma vx;\ Vy_0 = \Sigma vy;\ Vz_0 = \Sigma vz$, ... (3)

откуда $x_0 = \dfrac{\Sigma vx}{V};\ y_0 = \dfrac{\Sigma vy}{V};\ z_0 = \dfrac{\Sigma vz}{V}$ . . . . (4)

Если тѣло разсматривается, какъ матеріальная поверхность, то, называя поверхность всего тѣла черезъ S, поверхности частей черезъ $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n$, а вѣсъ 1 кв. единицы поверхности черезъ d', изъ ур-ій (1) получимъ

$$Sd'x_0 = \sum sd'x; \; Sd'y_0 = \sum sd'y; \; Sd'z_0 = \sum sd'z \text{ или}$$

послѣ упрощеній $Sx_0 = \sum sx; \; Sy_0 = \sum sy; \; Sz_0 = \sum sz, \; . \; . \; .$ (5)

откуда $x_0 = \dfrac{\sum sx}{S}; \; y_0 = \dfrac{\sum sy}{S}; \; z_0 = \dfrac{\sum sz}{S}$ . . . . (6)

Наконецъ, если тѣло разсматривается, какъ матеріальная линія, и L — длина линіи, $l_1, l_2, l_3 \ldots l_n$ — длины ея частей, а d'' вѣсъ 1 единицы длины, то изъ ур-ій (1) послѣ упрощеній получимъ

$$Lx_0 = \sum lx; \; Ly_0 = \sum ly; \; Lz_0 = \sum lz, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

$$\text{откуда } x_0 = \frac{\sum lx}{L}; \; y_0 = \frac{\sum ly}{L}; \; z_0 = \frac{\sum lz}{L} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Выраженія вида Vx, Sx, Lx, т.-е. произведенія изъ объема, поверхности или линіи на разстоянія ихъ центровъ тяжести до нѣкоторой плоскости называются (по аналогіи съ моментами силъ) *моментами объема, поверхности (площади) или линіи относительно плоскости*. Поэтому уравненія (3), (5), (7) выражаютъ слѣдующую теорему:

Моментъ объема (поверхности или линіи) относительно плоскости равенъ суммѣ моментовъ объемовъ (поверхностей или линій) его частей относительно той же самой плоскости.

§ 142. Если центры тяжести частей разсматриваемаго объема, поверхности или линіи лежатъ въ *одной* плоскости или на одной прямой, то, какъ это слѣдуетъ изъ сложенія параллельныхъ силъ, центръ тяжести всего объема, всей поверхности или всей линіи, такъ же лежитъ въ этой плоскости или на этой прямой.

Поэтому, *въ первомъ случаѣ* для опредѣленія центра тяжести достаточно опредѣлить *двѣ* его координаты, т.-е. разстоянія его отъ *двухъ* взаимно перпендикулярныхъ осей, проведенныхъ въ этой плоскости, а *во второмъ случаѣ*, достаточно опредѣлить только *одну* координату, т.-е. разстояніе отъ одной точки, выбранной на этой прямой.

Въ этомъ смыслѣ и употребляютъ выраженія: *моментъ объема, поверхности, площади или линіи относительно оси или точки*, и примѣняютъ уравненія (3), (5) и (7).

Примѣчаніе 1. Если въ уравненіи (1) § 14ф.

$$Px_0 = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ . \ . \ . \ + p_n x_n$$

предположимъ, что всѣ отдѣльныя части, а слѣдовательно и вѣса ихъ равны между собою, т.-е. что $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots p_n$ и $P = p_1 + p_2 + \ . \ . \ . \ + p_n = np$, то, написавъ это уравненіе въ такомъ видѣ:

$npx_0 = p(x_1 + x_2 + x_2 + \ . \ . + x_n)$, получимъ, что

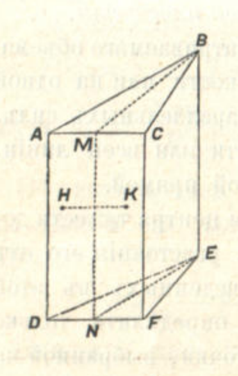
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ . \ . + x_n}{n}$$

т.-е. разстояніе центра тяжести тѣла (а также поверхности, площади или линіи) до нѣкоторой плоскости, оси или точки есть *средняя ариѳметическая* изъ разстояній равныхъ частей этого тѣла (поверхности, площади или линіи) до той же самой плоскости, оси или точки.

Вслѣдствіе этого замѣчательнаго свойства центра тяжести Пуансо назвалъ его *центромъ среднихъ разстояній.*

Примѣчаніе 2. Такъ какъ вѣсъ, а слѣдовательно, и массу тѣла можно считать сосредоточенными въ его центрѣ тяжести, то Эйлеръ предложилъ назвать центръ тяжести *центромъ инерціи* тѣла.

§ 143. **Геометрическія свойства центра тяжести.** Разсмотримъ тѣла, имѣющія плоскость, ось или центръ симметріи.



Фиг. 73.

I. Если черезъ тѣло (какъ напр., черезъ изображенную на фиг. 73 непараллельно усѣченную треугольную призму) можно провести плоскость ($MNBE$), разсѣкающую его такъ, что для произвольныхъ точекъ (A, D, H, . . .), находящихся по одну сторону плоскости, имѣются по другую ея сторону соотвѣтственныя точки (C, F, K,..), лежащія попарно на одномъ перпендикулярѣ къ плоскости и въ равномъ отъ нея удаленіи, то такая плоскость называется *плоскостью симметріи* тѣла.

Складывая попарно параллельныя силы тяжести, приложенныя къ соотвѣтственнымъ точкамъ тѣла, легко убѣдимся, что точки приложенія ихъ равнодѣйствующихъ лежатъ

въ плоскости симметріи, а слѣдовательно, и центръ тяжести тѣла лежитъ также въ этой плоскости.

II. Если черезъ тѣло могутъ быть проведены двѣ плоскости симметріи, то прямая пересѣченія ихъ называется *осью симметріи* тѣла. Очевидно, что центръ тяжести такого тѣла лежитъ на оси симметріи. Полезно замѣтить, что въ тѣлахъ вращенія ось вращенія есть вмѣстѣ и ось симметріи тѣла.

III. Если черезъ тѣло могутъ быть проведены три плоскости симметріи или, что все равно, двѣ оси симметріи, то точка пересѣченія ихъ называется *центромъ симметріи* тѣла. Центръ симметріи, очевидно, есть вмѣстѣ и центръ тяжести тѣла. На основаніи этихъ свойствъ непосредственно находимъ положеніе центровъ тяжести въ простѣйшихъ тѣлахъ, фигурахъ и линіяхъ:

1. Центръ тяжести прямой лежитъ на ея серединѣ.

2. Центры тяжести периметра или площади правильнаго многоугольника, круга, эллипса лежатъ въ ихъ геометрическихъ центрахъ.

3. Центры тяжести поверхности или объема правильнаго многогранника, шара, эллипсоида лежатъ въ ихъ геометрическихъ центрахъ.

4. Центры тяжести поверхности или объема правильной призмы и прямого цилиндра лежатъ въ серединѣ ихъ осей.

5. Центры тяжести поверхности или объема правильной пирамиды и прямого конуса лежатъ на ихъ осяхъ.

Примѣры опредѣленія центровъ тяжести.

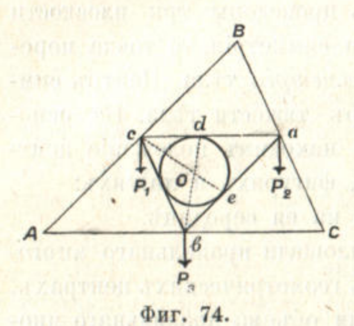
I. Центры тяжести линій.

§ 144. **Центръ тяжести периметра треугольника.** Положимъ, что данъ треугольникъ ABC (фиг. 74), составленный тремя прямыми: AB, BC и AC, вѣса которыхъ обозначимъ черезъ P_1, P_2 и P_3. Такъ какъ центры тяжести сторонъ лежатъ въ ихъ серединахъ c, a и b, то задача сводится къ опредѣленію центра 3-хъ параллельныхъ силъ P_1, P_2 и P_3, приложенныхъ къ этимъ точкамъ и соотвѣтственно пропорціональныхъ сторонамъ AB, BC и AC или вдвое меньшимъ ихъ сторонамъ ab, bc, ac треугольника abc.

Сложивъ силы P_1 и P_2, найдемъ точку d приложенія ихъ равнодѣйствующей, опредѣливъ ее изъ пропорціи

$$\frac{dc}{da} = \frac{BC}{AB} \text{ или } \frac{dc}{da} = \frac{bc}{ab} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

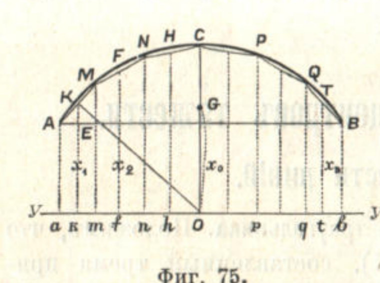
Искомый центръ тяжести лежитъ, очевидно, на прямой bd, соединяющей точку d съ точкой b приложенія силы P_3. Но изъ пропорціи (1) по извѣстной теоремѣ геометріи слѣдуетъ, что bd есть равнодѣлящая угла b треугольника abc.



Фиг. 74.

Если бы мы сложили сперва силы P_1 и P_3 и затѣмъ равнодѣйствующую ихъ съ силой P_2, то точно такимъ же разсужденіемъ убѣдились бы, что искомый центръ тяжести лежитъ такъ же и на прямой ce, равнодѣлящей угла a. Итакъ *центръ тяжести периметра треугольника* лежитъ въ точкѣ O пересѣченія биссектрисъ или *въ центрѣ круга, вписаннаго въ треугольникъ, вершины котораго лежатъ на серединахъ сторонъ даннаго треугольника*.

§ 145. **Центръ тяжести дуги AB круга** (фиг. 75) лежитъ, очевидно, на радіусѣ OC, перпендикулярномъ къ хордѣ AB, какъ на оси симметріи дуги. Поэтому, чтобы найти положеніе этой точки, достаточно опредѣлить ея разстояніе отъ центра O. Раздѣлимъ дугу на нѣсколько (n) равныхъ частей и проведемъ хорды AM, MN, NC,..... QB. Центръ тяжести каждой изъ нихъ находится въ ея серединѣ.



Фиг. 75.

Назовемъ для краткости длину каждой хорды черезъ l, а длину всей ломаной $AMNCPQB$ черезъ $L = nl$ и напишемъ уравненіе моментовъ всей ломаной и частей ея относительно діаметра YY параллельнаго хордѣ AB:

$$Lx_0 = lx_1 + lx_2 + lx_3 + \; . \; . + lx_n \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

откуда $x_0 = \dfrac{l(x_1 + x_2 + x_3 + \; . \; . \; . + x_n)}{nl} = \dfrac{x_1 + x_2 + \; . \; . \; . + x_n}{n}$.

Вторую часть уравненія (1) можно написать въ другомъ видѣ. Для этого, соединить центръ O съ серединой K хорды AM, замѣтимъ изъ подобія $\triangle$-ковъ AME и OKk, что $\frac{AM}{OK} = \frac{AE}{Kk}$ или $\frac{l}{OK} = \frac{AE}{x_1}$, откуда $lx_1 = OK \,.\, AE = OK \,.\, am$.

Такимъ же образомъ докажемъ, что $lx_2 = OK \,.\, mn$; $lx_3 = OK \,.\, nO$ и т. д.

Замѣнивъ въ уравненіи (1) члены lx_1, lx_2, lx_3, . . . lx_n равными имъ выраженіями и взявъ OK за скобки, получимъ:

$$Lx_0 = OK\ (am + mn + nO + \ldots + qb) \text{ или}$$
$$Lx_0 = OK \,.\, ab = OK \,.\, AB, \text{ откуда}$$

$$x_0 = \frac{OK \,.\, AB}{L} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Эта формула опредѣляетъ разстояніе отъ точки O центра тяжести периметра части правильнаго вписаннаго многоугольника $AMNCPQB$.

Когда число сторонъ периметра возрастетъ до безконечности, т.-е. когда этотъ периметръ обратился въ дугу, то апоѳема OK обратится въ радіусъ и

слѣдовательно $$x_0 = \frac{R \,.\, \overline{BA}}{\overset{\frown}{AB}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

гдѣ $\overline{AB}$ — длина хорды, а $\overset{\frown}{AB}$ — длина дуги.

Напишемъ эту формулу въ видѣ пропорціи

$$x_0 : R = \overline{AB} : \overset{\frown}{AB}, \text{ т.-е.}$$

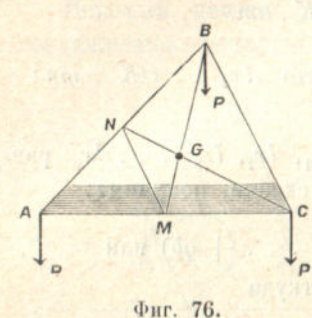
разстояніе центра тяжести дуги отъ центра окружности есть четвертая пропорціональная между радіусомъ, длиной хорды и длиной дуги.

Примѣръ. Если дуга AB равна полуокружности, то

$$x_0 = \frac{R \,.\, 2R}{\pi R} = \frac{2}{\pi} R = \frac{7}{11} R.$$

II. Центры тяжестей поверхностей.

§ 146. **Центръ тяжести площади треугольника.** Раздѣлимъ площадь $\triangle$-ка ABC (фиг. 76) прямыми, параллельными сторонѣ AC, на весьма большое число очень узкихъ полосъ, которыя можно разсматривать какъ матеріальныя прямыя. Центры тяжести этихъ прямыхъ лежатъ на ихъ серединахъ. Прямая, проходящая черезъ всѣ эти центры тяжести, есть очевидно, равнодѣлящая (медіана) BM стороны AC. На ней, какъ на геометрическомъ мѣстѣ центровъ тяжести всѣхъ элементарныхъ полосъ, лежитъ центръ тяжести площади треугольника.



Фиг. 76.

Точно такимъ же разсужденіемъ найдемъ, что этотъ центръ тяжести лежитъ и на медіанѣ CN стороны AB. Итакъ, центръ тяжести G площади треугольника лежитъ въ пересѣченіи его медіанъ.

Найдемъ вычисленіемъ мѣсто этой точки. Прямая MN, соединяющая середины сторонъ AB и AC, параллельна третьей сторонѣ BC и равна половинѣ ея. Поэтому $\triangle\ MNG \backsim \triangle\ BCG$ и слѣдовательно

$$\frac{MG}{BG}=\frac{MN}{BC}=\frac{1}{2},\ \text{т.-е.}\ MG=\frac{1}{2}BG\ \text{или}\ MG=\frac{1}{3}BM,$$

т.-е. *центръ тяжести треугольника лежитъ на* $\frac{1}{3}$ *медіаны, считая отъ основанія.*

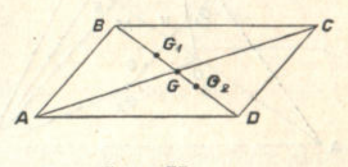
Полезно также замѣтить, что центръ тяжести треугольника отстоитъ отъ основанія на $\frac{1}{3}$ высоты треугольника, что не трудно доказать.

Примѣчаніе. Легко видѣть, что центръ тяжести треугольника совпадаетъ съ центромъ тяжести трехъ равныхъ и параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ вершинамъ A, B, C треугольника.

Дѣйствительно, точка приложенія равнодѣйствующей силъ A и C лежитъ въ точкѣ M — серединѣ прямой AE, а центръ

всѣхъ 3-хъ силъ лежитъ на прямой BM въ точкѣ G, дѣлящей BM въ отношенiи $1:2$.

§ 147. **Центръ тяжести площади параллелограмма** (фиг. 77), лежитъ въ точкѣ пересѣченiя его дiагоналей. Дѣйствительно, разсматривая параллелограммъ $ABCD$, какъ сумму двухъ треугольниковъ ABC и ADC, легко замѣтимъ, что центры тяжести G_1 и G_2 этихъ треугольниковъ лежитъ на дiагонали BD, представляющей ихъ общую медiану; центръ же тяжести всего параллелограмма, какъ точка приложенiя равнодѣйствующей вѣсовъ равныхъ треугольниковъ, лежитъ *на срединѣ* G дiагонали или, что все равно, въ пересѣченiи двухъ дiагоналей.

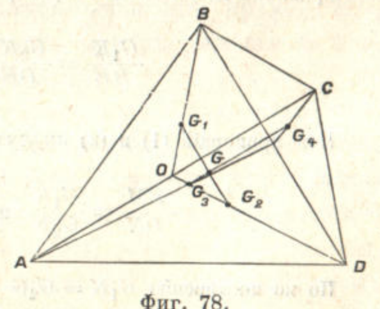


Фиг. 77.

§ 148. **Центръ тяжести площади четыреугольника.**

1-й способъ. Чтобы опредѣлить центръ тяжести четыреугольника $ABCD$ (фиг. 78), разобьемъ его дiагональю AC на треугольники ABC и ADC, проведемъ ихъ медiаны BO и DO и, раздѣливъ каждую изъ нихъ на 3 части, найдемъ центры тяжести G_1 и G_2 обоихъ треугольниковъ. Центръ тяжести даннаго четыреугольника $ABCD$ лежитъ, очевидно, на прямой G_1G_2.

Проведемъ теперь вторую дiагональ BD и точно также опредѣлимъ центры тяжести G_3 и G_4 двухъ треугольниковъ ABD и CBD, а слѣдовательно, и прямую G_3G_4, на которой лежитъ центръ тяжести четыреугольника. Итакъ, искомый центръ тяжести лежитъ на прямыхъ G_1G_2 и G_3G_4, т.-е. лежитъ въ точкѣ G ихъ пересѣченiя.

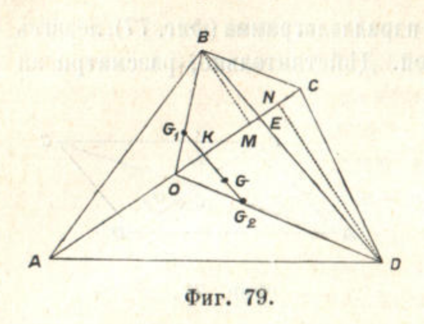


Фиг. 78.

§ 149. *2-й способъ* (фиг. 79). Опредѣливъ, какъ только что показано, центры тяжести G_1 и G_2 треугольниковъ ABC и ADC, замѣтимъ точку K пересѣченiя дiагонали AC, съ прямою G_1 G_2 и отложимъ отъ точки G_2 на G_1G_2 часть G_2G равную G_1K.

Полученная точка G и есть искомый центръ тяжести четыреугольника. Докажемъ это.

Искомый центръ тяжести долженъ лежать на прямой G_1G_2 и притомъ въ точкѣ, дѣлящей эту прямую на части, обратно пропорціональныя величинамъ площадей $\triangle$-въ ABC и ADC, какъ это слѣдуетъ изъ сложенія параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ G_1 и G_2 и пропорціональныхъ величинамъ площадей этихъ треугольниковъ. Площади $\triangle$-ковъ ABC и ADC, имѣющихъ общее основаніе AC, относятся какъ ихъ высоты BM и DN. Изъ подобныхъ $\triangle$-ковъ BME и DNE находимъ, что



Фиг. 79.

$$\frac{BM}{DN} = \frac{BE}{DE} \quad \ldots (1) \qquad \text{Но} \quad \frac{BE}{DE} = \frac{G_1K}{G_2K} \quad \ldots (2).$$

Дѣйствительно, $\triangle$-ки OBD и OG_1G_2 подобны, такъ какъ имѣютъ общій уголъ и $\frac{OG_1}{OB} = \frac{OG_2}{OD} = \frac{1}{3}$. Слѣдовательно, G_1G_2 параллельна BD, откуда видимъ, что $\triangle OG_1K \backsim \triangle OBE$, и слѣдовательно $\frac{G_1K}{BE} = \frac{OG_1}{OB} = \frac{1}{3}$.

Точно также $\triangle OG_2K \backsim \triangle ODE$, откуда $\frac{G_2K}{DE} = \frac{OG_2}{OD} = \frac{1}{3}$.

Сравнивъ двѣ послѣднія пропорціи, находимъ, что

$$\frac{G_1K}{BE} = \frac{G_2K}{DE} \quad \text{или} \quad \frac{BE}{DE} = \frac{G_1K}{G_2K}.$$

Изъ пропорцій (1) и (2) имѣемъ

$$\frac{BM}{DN} = \frac{G_1K}{G_2K} \quad \text{или} \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle ADC} = \frac{G_1K}{G_2K} \quad \ldots\ldots (3).$$

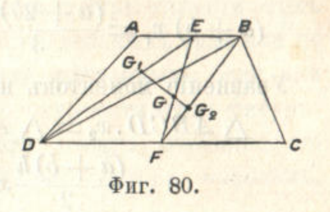
Но по построенію $G_1K = G_2G$ и $G_2K = G_1G$. Слѣдовательно

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADC} = \frac{G_2G}{G_1G},$$

что и слѣдовало доказать.

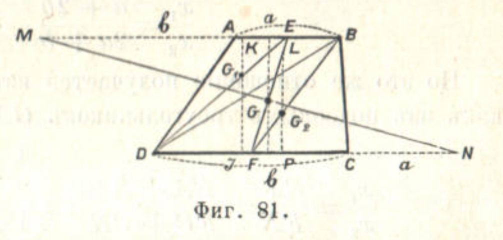
§ 150. Центръ тяжести трапеціи можно опредѣлить или только что указанными построеніями, или другими способами, изъ которыхъ укажемъ здѣсь два наиболѣе употребительные.

1-ый способъ. Центръ тяжести трапеціи $ABCD$ (фиг. 80) лежитъ на прямой EF, соединяющей середины ея основаній, такъ какъ эта прямая представляетъ геометрическое мѣсто центровъ тяжести элементарныхъ полосъ, параллельныхъ основаніямъ, на которыя разбивается площадь трапеціи. Но центръ тяжести трапеціи лежитъ также и на прямой G_1G_2, соединяющей центры тяжести треугольниковъ ABD и BDC, полученныхъ при проведеніи діагонали BD. Итакъ, искомый центръ тяжести лежитъ въ точкѣ G пересѣченія прямыхъ EF и G_1G_2.



Фиг. 80.

2-ой способъ. Продолжимъ верхнее основаніе трапеціи $AB=a$ (фиг. 81) на величину AM, равную нижнему основанію $DC=b$, а нижнее основаніе продолжимъ въ противоположную сторону на величину CN, равную AB. Соединивъ точки M и N прямою MN, а также середины E и F обоихъ основаній прямою EF, найдемъ въ пересѣченіи этихъ прямыхъ центръ тяжести G трапеціи.



Фиг. 81.

Для доказательства правильности построенія, а также для опредѣленія искомаго центра тяжести вычисленіемъ, разобьемъ трапецію на два треугольника ABD и BDC, найдемъ ихъ центры тяжести G_1 и G_2 и воспользуемся теоремой моментовъ площадей ихъ относительно основаній $AB=a$ и $DC=b$, причемъ разстоянія центра тяжести трапеціи отъ основаній будемъ обозначать черезъ x_1 и x_2.

Уравненіе моментовъ площадей относительно AB:

$$\triangle ABCD \,.\, x_1 = \triangle ABD \,.\, G_1K + \triangle BDC \,.\, G_2L, \text{ или}$$

называя высоту трапеціи черезъ h и замѣтивъ, что $G_1K=\dfrac{h}{3}$, а $G_2L=\dfrac{2h}{3}$:

$$\frac{(a+b)\,h}{2}\,.\,x_1=\frac{ah}{2}\,.\,\frac{h}{3}+\frac{bh}{2}\,.\,\frac{2h}{3},\text{ или}$$

$$(a+b)\,x_1=\frac{(a+2b)\,h}{3},\text{ откуда } x_1=\frac{(a+2h)\,h}{3\,(a+b)}\;.\;.\;.\;(1).$$

Уравненіе моментовъ площадей относительно DC:

$$\triangle\,ABCD\,.\,x_2=\triangle\,ABD\,.\,G_1\,J+\triangle\,BDC\,.\,G_2\,P,\text{ или}$$

$$\frac{(a+b)\,h}{2}\,x_2=\frac{ah}{2}\,.\,\frac{2h}{3}+\frac{bh}{2}\,.\,\frac{h}{3},\text{ или}$$

$$(a+b)\,x_2=\frac{(2\,a+b)\,h}{3},\text{ откуда } x_2=\frac{(2\,a+b)\,h}{3\,(a+b)}\;.\;.\;.\;(2).$$

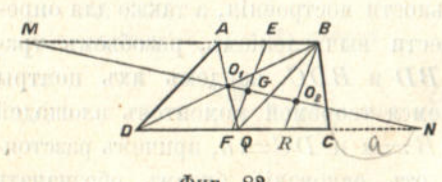
Раздѣливъ (1) на (2), получимъ:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{a+2b}{2a+b}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3).$$

Но это же отношеніе получается изъ нашего построенія, такъ какъ изъ подобныхъ треугольниковъ GME и GNF имѣемъ:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{EM}{FN}=\frac{EA+AM}{FC+CN}=\frac{\frac{1}{2}\,a+b}{\frac{1}{2}\,b+a}=\frac{a+2b}{2a+b}.$$

Примѣчаніе. Справедливость этого построенія можно обнаружить, не пользуясь теоремой моментовъ, слѣдующимъ образомъ. Проведя BQ параллельно AD (фиг. 82), разобьемъ трапецію на параллелограммъ $ABQD$ и треугольникъ BQC. Найдемъ ихъ центры тяжести O_1 и O_2, и продолжимъ прямую O_1O_2, на которой лежитъ искомый центръ тяжести, до пересѣченія съ основаніями трапеціи въ точкахъ M и N. Слѣдуетъ доказать, что $AM=DC=b$ и $CN=AB=a$.



Фиг. 82.

Изъ равенства $\triangle$-ковъ MBO_1 и NDO_1 находимъ, что

$$AM+a=CN+b\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(4).$$

а изъ подобія $\triangle$-ковъ MBO_2 и NRO_2, что

$$RN:\,BM=RO_2:BO_2\text{ или }\left(\frac{b-a}{2}+CN\right):(a+AM)=1:2,$$

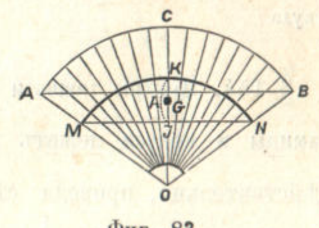
откуда $$a+AM=2\left(\frac{b-a}{2}+CN\right)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(5).$$

Приравнявъ другъ другу вторыя части уравненій (4) и (5), получимъ

$$CN+b=b-a+2\,CN,\text{ откуда } CN=a\text{ и } AM=b.$$

§ 151. **Центръ тяжести неправильнаго многоугольника** находятъ, разбивая его сперва на простѣйшія фигуры, напр., на треугольники, трапеціи, прямоугольники, и опредѣляя центры тяжести этихъ фигуръ, а затѣмъ по теоремѣ сложенія параллельныхъ силъ или по теоремѣ моментовъ относительно прилично выбранныхъ осей или точекъ опредѣляя общій центръ тяжести совокупности этихъ фигуръ.

§ 152. **Центръ тяжести кругового сектора** лежитъ, очевидно, на радіусѣ OC (фиг. 83), дѣлящемъ дугу AB сектора пополамъ, какъ на оси симметріи. Раздѣливъ радіусами секторъ AOB на весьма большое число узкихъ секторовъ, которые можно считать за треугольники, находимъ, что центры тяжести ихъ лежатъ на дугѣ MN, описанной изъ центра O радіусомъ $OM = \frac{2}{3} AO = \frac{2}{3} R$. Итакъ, вѣса всѣхъ частей, составляющихъ данный секторъ, какъ бы размѣщены по дугѣ MN, откуда понятно, что центръ тяжести сектора совпадаетъ съ центромъ тяжести этой дуги. Но въ такомъ случаѣ, какъ было уже доказано, $OG = OM \frac{\overline{MN}}{\overset{\frown}{MN}}$.



Фиг. 83.

Или, такъ какъ $OM = \frac{2}{3} R$; $\overline{MN} = \frac{2}{3} \overline{AB}$; $\overset{\frown}{MN} = \frac{2}{3} \overset{\frown}{AB}$, то

$$OG = \frac{2}{3} R \frac{\overline{AB}}{\overset{\frown}{AB}}$$

Примѣръ. Если дуга $AB = \pi R$, т.-е. полуокружности, то секторъ обращается въ половину круга и

$$OG = \frac{2}{3} R \frac{2R}{\pi R} = \frac{4R}{3\pi} = \frac{14}{33} R.$$

§ 153. **Центръ тяжести кругового сегмента** опредѣляется по теоремѣ моментовъ слѣдующимъ образомъ (фиг. 83)

Назовемъ черезъ S, S_1 и S_2 площади сектора, треугольника и сегмента, а черезъ x, x_1 и x_2 разстоянія ихъ центровъ тяжести до центра O дуги. Тогда имѣемъ

$$Sx = S_1 x_1 + S_2 x_2 \text{ или } S_2 x_2 = Sx - S_1 x_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1).$$

$$\text{Но } S=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}.R;\ x=\frac{2}{3}R\frac{\overline{AB}}{\overset{\frown}{AB}},\ \text{откуда } Sx=\frac{1}{3}R^2\,.\,\overline{AB};$$

$$S_1=\frac{1}{2}\overline{AB}.h;\ x_1=\frac{2}{3}h,\ \text{слѣдоват. } S_1\,x_1=\frac{1}{3}\overline{AB}\cdot h^2=\frac{1}{3}\overline{AB}\left(R^2-\frac{AB^2}{4}\right)$$

$$\text{Итакъ } S_2 x_2=\frac{1}{3}R^2\,.\,\overline{AB}-\frac{1}{3}\overline{AB}\left(R^2-\frac{AB^2}{4}\right)=\frac{AB^3}{12},$$

откуда
$$x_2=\frac{AB^3}{12\,S_2}.$$

§ 154. **Центры тяжести боковыхъ поверхностей правильной пирамиды и конуса лежатъ на $\frac{1}{3}$ ихъ осей, считая отъ основанія.** Дѣйствительно, проведя сѣченіе, параллельное основанію пирамиды на разстояніе $\frac{1}{3}$ ея оси, замѣтимъ, что на серединахъ сторонъ его лежатъ центры тяжести треугольниковъ, образующихъ боковыя грани пирамиды. Отсюда понятно, что центръ тяжести боковой поверхности пирамиды совпадаетъ съ центромъ тяжести периметра многоугольника сѣченія, т.-е. лежитъ на $\frac{1}{3}$ высоты пирамиды.

Точно также докажемъ теорему относительно центра тяжести боковой поверхности конуса, разсматривая конусъ какъ пирамиду съ безчисленнымъ множествомъ безконечно узкихъ граней.

§ 155. **Центры тяжести боковыхъ поверхностей шароваго пояса и сегмента лежатъ на ихъ высотахъ, какъ на осяхъ симметріи.** Проведя черезъ середину высоты h шароваго пояса сѣченіе, параллельное его основанію, замѣтимъ, что оно раздѣлитъ данный поясъ на двѣ части съ равновеликими поверхностями $=2\pi R\frac{h}{2}$ $=\pi Rh$, откуда заключаемъ, что центръ тяжести поверхности пояса лежитъ въ центрѣ этого сѣченія или на серединѣ высоты пояса.

Точно также доказывается, что центръ тяжести шароваго сегмента лежитъ на серединѣ его высоты (или стрѣлки).

Примѣръ. Центръ тяжести поверхности полушара находится на серединѣ его радіуса.

III. Центры тяжести объемовъ.

§ 156. Центръ тяжести треугольной пирамиды. Найдемъ центръ тяжести M грани BCD данной пирамиды $ABCD$ (фиг. 84) и соединимъ эту точку съ вершиной A. Прямая AM, очевидно, представляетъ геометрическое мѣсто центровъ тяжести всѣхъ сѣченій пирамиды, параллельныхъ грани BCD и представляющихъ подобные ей треугольники.

Фиг. 84.

Отсюда заключаемъ, что центръ тяжести пирамиды лежитъ на прямой AM.

Опредѣливъ центръ тяжести N грани ACD, точно такимъ же разсужденіемъ найдемъ, что центръ тяжести пирамиды лежитъ на прямой BN.

Итакъ, центръ тяжести пирамиды лежитъ въ точкѣ G пересѣченія прямыхъ AM и BN, лежащихъ въ одной плоскости ABE. Чтобы опредѣлить вычисленіемъ положеніе точки G, замѣтимъ, что

$\triangle$-ки ABE и MNE подобны $\left(\angle E \text{ общій и } \frac{ME}{BE} = \frac{NE}{AE} = \frac{1}{3}\right)$,

откуда находимъ, что MN параллельна AB и равна $\frac{1}{3}$ ея. Поэтому $\triangle$-ки GMN и GAB также подобны и, слѣдовательно

$$\frac{GM}{GA} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{3}.$$

Итакъ $GM = \frac{1}{3}AG$ или $GM = \frac{1}{4}AM$, т.-е. *центръ тяжести треугольной пирамиды лежитъ на прямой, соединяющей вершину пирамиды съ центромъ тяжести основанія въ разстояніи* $\frac{1}{4}$ *этой прямой, считая отъ основанія.*

Примѣчаніе. Центръ тяжести треугольной пирамиды совпадаетъ съ центромъ 4-хъ равныхъ и параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ вершинамъ пирамиды. Дѣйствительно, центръ тяже-

сти M треугольника BCD совпадаетъ съ центромъ 3-хъ равныхъ и параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ вершинамъ B, C и D (§ 146). Сложивъ равнодѣйствующую этихъ трехъ силъ съ 4-ой параллельной силой, приложенной въ вершинѣ A, находимъ, что общій центръ 4-хъ данныхъ силъ лежитъ на $\frac{1}{4}$ прямой AM, считая отъ основанія, что и слѣдовало доказать.

§ 157. **Центры тяжести многоугольной пирамиды и конуса.** Разбивъ многоугольную пирамиду діагональными плоскостями на треугольныя пирамиды, найдемъ, что центры тяжести этихъ пирамидъ, а слѣдовательно, и центръ тяжести многоугольной пирамиды лежатъ въ плоскости, параллельной ея основанію и отстоящей отъ нея на $\frac{1}{4}$ высоты. Но вмѣстѣ съ тѣмъ очевидно, что искомый центръ тяжести лежитъ также на прямой, соединяющей вершину пирамиды съ центромъ тяжести основанія, такъ какъ эта прямая есть геометрическое мѣсто центровъ тяжести всѣхъ сѣченій пирамиды, параллельныхъ ея основанію. Итакъ, центръ тяжести многоугольной пирамиды, также какъ и треугольной, лежитъ на прямой, соединяющей вершину ея съ центромъ тяжести основанія въ разстояніи $\frac{1}{4}$ этой прямой, считая отъ основанія.

Доказанная теорема справедлива и для конуса, такъ какъ его можно разсматривать какъ пирамиду съ безчисленнымъ множествомъ граней.

§ 158. **Центръ тяжести объема шарового сектора** (фиг. 83). Шаровой секторъ AOB можно представить какъ сумму безчисленнаго множества равныхъ элементарныхъ пирамидъ, основанія которыхъ лежатъ на шаровой поверхности сектора, а вершины сходятся въ центрѣ шара. По только что доказанному, центры тяжести каждой изъ этихъ пирамидъ лежатъ на разстояніи $\frac{3}{4}$ радіуса шара, считая отъ центра, или, что все равно, на поверхности шарового сегмента MKN, описаннаго изъ центра радіусомъ $= \frac{3}{4} R$. Отсюда понятно, что центръ тяжести G объема шарового сектора AOB совпадаетъ съ центромъ тяжести поверх-

ности сегмента MKN, т.-е. съ серединой его высоты KJ равной $\frac{3}{4}$ высоты CD сектора.

Поэтому разстояніе $OG = OK - \frac{KJ}{2} = \frac{3}{4} R - \frac{3}{8} h$ или

$$OG = \frac{3}{8}(2R - h)$$

§ 159. **Центръ тяжести тѣла произвольной формы** находятъ, разбивая его сперва на такія части, опредѣленіе центровъ тяжести которыхъ извѣстно (чаще всего на пирамиды), а затѣмъ примѣняя теорему моментовъ всего объема и частей его.

Если разсматриваемое тѣло не однородно, т.-е. если оно состоитъ изъ частей съ различной плотностью (напр., изъ дерева, металла и камня и т. п.), то, раздѣливъ его на однородныя части, находятъ центръ тяжести на основаніи теоремы моментовъ вѣса всего тѣла и частей его.

Примѣръ 1. Опредѣлить центръ тяжести тѣла, состоящаго изъ чугуннаго цилиндра и укрѣпленнаго въ центрѣ его верхняго основанія гранитнаго шара (фиг. 85).

Діаметръ основанія цилиндра = діаметру шара = d сантим. Высота цилиндра = $2d$. Удѣльный вѣсъ гранита = 3, а чугуна = 7,5.

Очевидно, что центръ тяжести тѣла лежитъ на прямой AB, представляющей его ось вращенія. Опредѣлимъ разстояніе x центра тяжести отъ центра A нижняго основанія цилиндра, для чего составимъ уравненіе моментовъ вѣсовъ всего тѣла и двухъ его частей относительно точки A.

Объемъ шара $= \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\pi d^3}{6}$; вѣсъ его $\frac{3\pi d^3}{6} = \frac{\pi d^3}{2}$;

разстояніе OA его центра тяжести $= 2d + \frac{1}{2} d = \frac{5}{2} d$. Вѣсъ цилиндра $= \frac{\pi d^2}{4} . 2d . 7{,}5 = 15 \frac{\pi d^3}{4}$; разстояніе CA его центра тяжести $= d$.

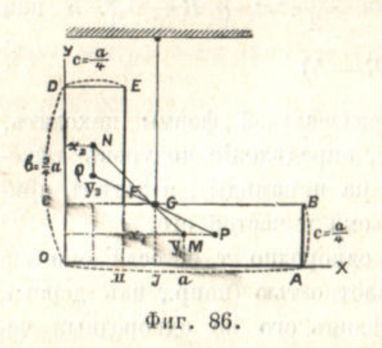
Фиг. 85.

Поэтому $\left(\frac{\pi d^3}{2} + \frac{15\pi d^3}{4}\right) x = \frac{\pi d^3}{2} \cdot \frac{5d}{2} + \frac{15\,\pi d^3}{4} . d$ или $\left(\frac{1}{2} + \frac{15}{4}\right) x = \frac{5}{4} d + \frac{15}{4} d$ или $17\,x = 20d$, откуда $x = 1\frac{3}{17} d$.

Примѣръ 2. Найти центръ тяжести тѣла (фиг. 86), состоящаго изъ двухъ призмъ, соединенныхъ подъ прямымъ угломъ. Разсѣчемъ тѣло пополамъ плоскостью симметріи, проходящею черезъ высоты призмъ, и замѣтивъ, что всѣ сѣченія тѣла, параллельныя этой плоскости, равны между собою, находимъ, что вмѣсто теоремы моментовъ объемовъ здѣсь возможно примѣнить теорему моментовъ площадей сѣченія тѣла плоскостью симметріи.

Пусть $OA = a$; $OD = b = \frac{3}{4}a$, $AB = DE = c = \frac{a}{4}$.

Проведемъ двѣ взаимно перпендикулярныя оси OX и OY и составимъ относительно ихъ уравненія моментовъ площадей всего сѣченія и его частей, за которыя возьмемъ прямоугольники $OABC$ и $CDEF$.



Фиг. 86.

Площадь $OABC = ac = \frac{a^2}{4}$. Разстоянія ея центра тяжести отъ оси OY и OX соотвѣтственно равны

$$x_1 = \frac{a}{2} \text{ и } y_1 = \frac{c}{2} = \frac{a}{8}.$$

Площадь $CDEF = (b - c)\,c = \left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{4}a\right)\frac{a}{4} = \frac{a^2}{8}$. Разстоянія ея центровъ тяжести отъ OY и OX равны $x_2 = \frac{c}{2} = \frac{a}{8}$

и $$y_2 = OC + \frac{OD - OC}{2} = \frac{OD + OC}{2} = \frac{b + c}{2} = \frac{a}{2}.$$ Поэтому

уравненіе моментовъ относительно OY:

$$\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8}\right)x = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{a}{2} + \frac{a^2}{8}\cdot\frac{a}{2} \quad \text{или} \quad \frac{3}{2}x = \frac{a}{2} + \frac{a}{16}$$

или $$3x = \frac{9}{8}a, \text{ откуда } x = \frac{3}{8}a.$$

Уравненіе моментовъ относительно OX:

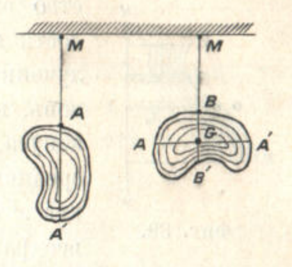
$$\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8}\right)y = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{a}{8} + \frac{a^2}{8}\cdot\frac{a}{2} \quad \text{или} \quad \frac{3}{2}x = \frac{a}{8} + \frac{a}{4}$$

или $$3x = \frac{3}{4}a, \text{ откуда } y = \frac{1}{4}a.$$

Отложивъ по оси OX отрѣзокъ $OJ = x = \frac{3}{8}a$, а по оси OY отрѣзокъ $OC = y = \frac{1}{4}a$ и возставивъ изъ точекъ J и C перпендикуляры къ осямъ, получимъ въ пересѣченіи ихъ точку G—искомый центръ тяжести нашего сѣченія, а слѣдовательно, и всего тѣла. Подвѣсивъ наше тѣло въ точкѣ G, увидимъ, что оно будетъ находиться въ равновѣсіи въ любомъ своемъ положеніи.

Центръ тяжести G легко найти и построеніемъ. Для этого достаточно провести прямую MN, соединяющую центры тяжести прямоугольниковъ $OABC$ и $CDEF$, а затѣмъ прямую PQ, соединяющую центры тяжести двухъ другихъ прямоугольниковъ $ABFH$ и $ODEH$, образующихъ нашу фигуру. Въ пересѣченіи прямыхъ MN и PQ получимъ ту же самую точку G.

§ 160. **Опредѣленіе центра тяжести путемъ опыта.** I. Разсматриваемое тѣло подвѣшиваютъ въ какой нибудь точкѣ A его (фиг. 87) посредствомъ нити или тонкой проволоки къ неподвижной точкѣ M. Когда тѣло придетъ въ положеніе покоя (равновѣсія), то проводятъ по нему черту AA', составляющую продолженіе вертикальнаго направленія нити AM. Центръ тяжести тѣла лежитъ на прямой AA', такъ какъ при равновѣсіи центръ тяжести, какъ точка приложенія равнодѣйствующей силъ тяжести, очевидно, должна находиться на одной вертикали съ неподвижной точкой. Подвѣсивъ тѣло въ другой его точкѣ B, точно также находятъ, что искомый центръ тяжести лежитъ на прямой BB', составляющей продолженіе вертикали BM. Итакъ, центръ тяжести тѣла находится въ точкѣ G пересѣченія прямыхъ AA' и BB'.



Фиг. 87.

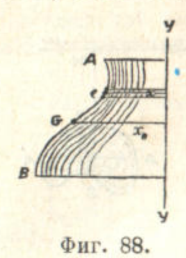
II. Устанавливаютъ тѣло въ равновѣсіи на остромъ ребрѣ какого нибудь бруска. Центръ тяжести тѣла, очевидно, лежитъ въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ это ребро. Перевернувъ тѣло и установивъ его въ равновѣсіи на томъ же ребрѣ въ новыхъ положеніяхъ еще два раза, находятъ еще двѣ плоскости, въ которыхъ лежитъ центръ тяжести, положеніе котораго окончательно опредѣлится, какъ точки пересѣченія трехъ найденныхъ плоскостей.

Теоремы Гюльдена.

§ 161. Ученіе о центрѣ тяжести позволяетъ вывести двѣ замѣчательныя геометрическія теоремы, при помощи которыхъ опредѣляются поверхности и объемы тѣлъ, полученныхъ отъ вращенія линій и площадей какого угодно вида около осей, лежащихъ съ ними въ одной плоскости. Эти теоремы были первоначально открыты древнимъ геометромъ Паппомъ, но затѣмъ потеряны и вторично открыты ученымъ монахомъ Гюльденомъ.

I. Поверхность тѣла вращенія равна произведенію изъ длины образующей линіи на окружность, описанную ея центромъ тяжести.

Положимъ (фиг. 88), что линія $AB = L$ вращается около оси YY, описывая нѣкоторую поверхность. Разобьемъ AB на множество элементарныхъ отрѣзковъ, которые по малости можно считать прямыми. Поверхность, полученная отъ вращенія каждаго изъ такихъ отрѣзковъ, напр., $ab = l$, какъ поверхность усѣченнаго конуса, равна произведенію длины окружности средняго сѣченія на образующую, т.-е. $s = 2\pi x l$, гдѣ x есть разстояніе отъ оси середины или, что все равно, центра тяжести отрѣзка.



Фиг. 88.

Полная поверхность вращенія S равна суммѣ такихъ элементарныхъ поверхностей, т.-е. $S = \Sigma s = \Sigma 2\pi x l$ или, по выведеніи за знакъ Σ постоянныхъ множителей:

$$S = 2\pi \Sigma l x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Но выраженіе $\Sigma l x$ представляетъ сумму моментовъ элементарныхъ линій относительно оси YY, которая, какъ извѣстно, равна моменту всей образующей линіи относительно той же оси, т.-е.

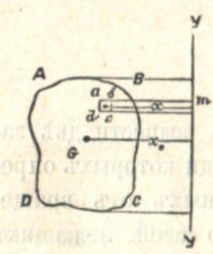
$$\Sigma l x = L x_0 , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

гдѣ x_0—разстояніе центра тяжести прямой $AB = L$ отъ оси. Итакъ

$$S = 2\pi x_0 L \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

II. Объемъ тѣла вращенія равенъ произведенію изъ образующей площади на окружность, описанную ея центромъ тяжести.

Найдемъ объемъ кольцеобразнаго тѣла, полученнаго при вращеніи площади $ABCD$ около оси YY (фиг. 89). Разобьемъ образующую площадь на элементарные прямоугольники вида $abcd = s$. Назовемъ черезъ r_1 и r_2 — разстоянія am и bm, черезъ h—длину ad и черезъ x и x_0—разстоянія центровъ тяжести площадей $abcd$ и $ABCD$ отъ оси. Объемъ v тѣла, полученнаго отъ вращенія элем. прямоугольника $abcd$, представляетъ объемъ полаго цилиндра, поэтому $v = \pi h (r_1^2 - r_2^2) = \pi h (r_1 - r_2)(r_1 + r_2)$.



Фиг. 89.

Но $h(r_1 - r_2) = ad \, . \, ab = s$, а $r_1 + r_2 = 2x$ (такъ какъ $x = r_2 + \frac{r_1 - r_2}{2} = \frac{r_1 + r_2}{2}$).

Поэтому $v = 2\pi x \, . \, s$.

Объемъ всего тѣла вращенія $V = \Sigma v = \Sigma 2\pi x s$ или

$$V = 2\pi \Sigma s x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Но Σsx, какъ сумма моментовъ элементарныхъ площадей относительно оси, равна моменту всей площади $ABCD=S$ относительно той же оси, т.-е. $\Sigma sx = Sx_0$ . . . . . . (5).

Изъ (4) и (5) получаемъ $V = 2\pi x_0 S$ . . . . . (6).

Примѣръ. Найдемъ поверхность и объемъ круглаго кольца (такъ называемаго *тора*), полученнаго при вращеніи круга около оси, если радіусъ круга $=r$, а разстояніе его центра отъ оси $=R$.

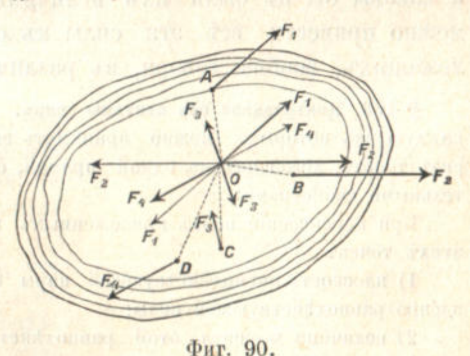
$$S = 2\pi r \,.\, 2\pi R = 4\pi^2 Rr; \quad V = \pi r^2 \,.\, 2\pi R = 2\pi^2 Rr^2.$$

Задачи. Провѣрить по теоремѣ Гюльдена извѣстныя формулы поверхностей и объемовъ: 1) цилиндра, 2) конуса, 3) шара.

Равновѣсіе тѣлъ.

Равновѣсіе свободнаго твердаго тѣла.

§ 162. **Сложеніе системы силъ какъ угодно приложенныхъ къ твердому тѣлу.** Вообразимъ, что къ нѣкоторому свободному твердому тѣлу въ различныхъ его точкахъ приложены силы F_1, F_2, F_3,... F_n, дѣйствующія по различнымъ направленіямъ и лежащія въ различныхъ плоскостяхъ (фиг. 90).



Фиг. 90.

Перенесемъ одну изъ этихъ силъ, напр. F_1, параллельно самой себѣ въ произвольно выбранную точку O тѣла. Какъ извѣстно, при этомъ получится сила F_1, приложенная въ точкѣ O и пара (F_1, F_1), лежащая въ плоскости, проходящей черезъ точку O и направленіе силы F_1. Сдѣлавъ тоже самое со всѣми остальными силами F_2, F_3,.. F_n, получимъ систему силъ, сходящихся пучкомъ въ точкѣ O и систему паръ (F_1, F_1), (F_2, F_2), (F_3, F_3)..., лежащихъ въ разныхъ плоскостяхъ, при чемъ всѣ эти плоскости пересѣкаются между собой въ точкѣ O.

Сложивъ по правилу многоугольника всѣ сходящіяся силы, а также всѣ полученныя пары (для чего всего удобнѣе предварительно изобразить ихъ осями), получимъ одну равнодѣйствующую силу R и одну равнодѣйствующую пару, моментъ которой обозначимъ черезъ G.

Положеніе произвольно выбранной точки O, называемой *центромъ приведенія* не имѣетъ значенія ни для величины, ни для направленія равнодѣйствующей силы R. Это прямо слѣдуетъ изъ того, что при параллельномъ перенесеніи силъ въ какую угодно точку мы не измѣняемъ ни величины, ни направленія ихъ.

Нельзя, однако, сказать того же про величину и положеніе равнодѣйствующей пары: при выборѣ различныхъ центровъ приведенія плоскости слагающихъ паръ будутъ принимать различныя положенія и, слѣдовательно, складывая эти пары, мы будемъ получать равнодѣйствующія пары, отличающіяся одна отъ другой какъ по величинѣ, такъ и по положенію своихъ плоскостей.

Вообще, въ зависимости отъ выбора того или другого центра приведенія, плоскость равнодѣйствующей пары будетъ пересѣкать направленіе равнодѣйствующей силы R подъ различными углами. Въ частномъ случаѣ, о которомъ будемъ еще говорить, плоскость пары G можетъ проходить черезъ направленіе силы R.

Итакъ, сколько бы къ твердому тѣлу ни было приложено силъ и каковы бы ни были ихъ величины и направленія, всегда возможно привести всѣ эти силы къ одной силѣ и къ одной парѣ, лежащихъ, вообще говоря, въ различныхъ плоскостяхъ.

§ 163. **Центральная ось системы паръ.** Между различными точками тѣла, каждую изъ которыхъ можно принимать за центръ приведенія, существуетъ рядъ точекъ, лежащихъ на одной прямой, обладающихъ слѣдующими замѣчательными свойствами:

При перенесеніи всѣхъ приложенныхъ къ тѣлу силъ въ какую-либо изъ этихъ точекъ

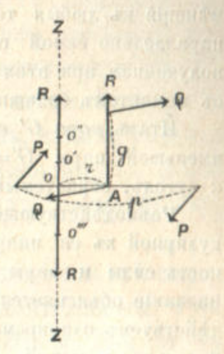
1) плоскость равнодѣйствующей пары будетъ перпендикулярна къ направленію равнодѣйствующей силы;

2) величина момента этой равнодѣйствующей пары будетъ *наименьшая (minimum)* по сравненіи съ величинами моментовъ равнодѣйствующихъ паръ, полученныхъ при перенесеніи силъ въ какія-либо другія точки тѣла.

Доказательство 1. Положимъ, что мы привели всѣ дѣйствующія на тѣло силы къ одной силѣ R, приложенной въ точкѣ A и къ одной парѣ G. Разложимъ эту пару по правилу параллелограмма на двѣ слагающія: на пару съ моментомъ $Pp=G'$, лежащую въ плоскости, перпендикулярной къ силѣ R, и

пару съ моментомъ $Qq=G''$, лежащую въ плоскости, проходящей черезъ направленіе силы R (фиг. 91).

Перенесемъ силу R параллельно самой себѣ въ точку O, отстоящую отъ прямой AR на разстояніи $r=\frac{Q}{R}q$ и въ такомъ направленіи, чтобы получившаяся при этомъ пара съ моментомъ $Rr=Qq$ была противоположна по направленію ранѣе полученной парѣ съ моментомъ Qq. Тогда обѣ эти пары, какъ равныя, противоположныя и лежащія въ одной плоскости, взаимно уничтожатся и, слѣдовательно, останется одна сила R, приложенная въ точкѣ O, и одна пара $Pp=G'$, лежащая въ плоскости, перпендикулярной къ направленію силы.



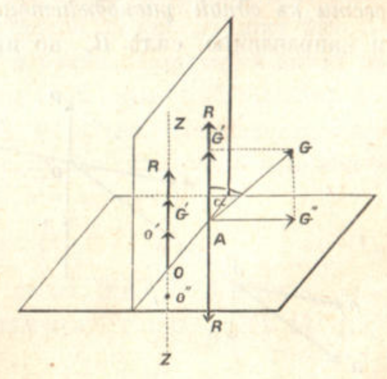
Фиг. 91.

Очевидно, что, перенося центръ приведенія изъ точки O, въ точки O', O'', O'''..., лежащія на прямой OR, мы ничѣмъ не измѣняли бы полученной совокупности силы R и пары G', такъ какъ при этомъ сила переносилась бы по ея направленію, а пара перемѣщалась бы параллельно самой себѣ.

Наоборотъ, если силу R перенесемъ параллельно самой себѣ въ какую нибудь точку, лежащую внѣ прямой OR и отстоящую отъ нея въ нѣкоторомъ разстояніи x, то, сложивъ получившуюся при этомъ пару Rx съ прежней парой Pp, получимъ новую пару, плоскость которой, понятно, уже не будетъ перпендикулярна къ направленію силы R. Такъ какъ эта пара получилась отъ сложенія паръ, лежащихъ въ взаимно перпендикулярныхъ плоскостяхъ, то моментъ ея всегда будетъ *больше* момента пары $Pp=G'$. Такимъ образомъ пара G', перпендикулярная къ силѣ R, представляетъ *наименьшую* пару изъ всѣхъ паръ, получающихся при сложеніи произвольной системы силъ.

Прямая OR, представляющая геометрическое мѣсто центровъ приведенія паръ съ наименьшимъ моментомъ, по предложенію *Пуансо*, получила названіе *центральной оси системы паръ*.

Доказательство 2. Положимъ, что всѣ силы приведены въ точкѣ A къ равнодѣйствующей силѣ R и равнодѣйствующей парѣ, изображенной ея осью G (фиг. 92). Разложимъ по правилу параллелограмма пару G на двѣ составляющія пары съ осями (и моментами) G' и G'', изъ которыхъ первая совпадала бы съ направленіемъ силы R, а вторая была бы перпендикулярна къ этой силѣ. Повернемъ пару G'' въ ея плоскости такъ, чтобы одна изъ силъ ея приняла положеніе прямопротивоположное силѣ R и замѣ-



Фиг. 92.

нимъ затѣмъ эту пару другою съ равнымъ моментомъ $(R.OA)$, но съ силами равными R.

Тогда двѣ равныя и прямопротивоположныя силы R взаимно уничтожатся и останется только сила R, приложенная въ точкѣ O, и пара съ осью G', которую можно перенести параллельно самой себѣ въ точку O до совпаденія съ силой R.

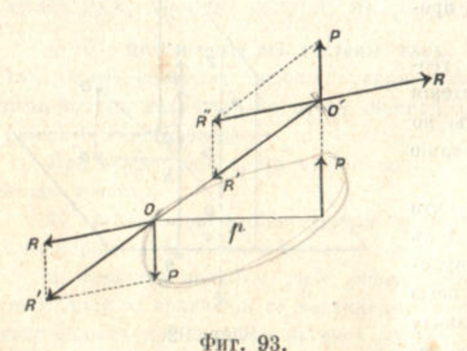
Очевидно, что силу R и ось пары G' можно переносить безъ всякаго измѣненія въ любыя точки центральной оси ZZ. Но если силу R перенесемъ параллельно самой себѣ въ какую-либо точку, не лежащую на оси ZZ, то полученная при этомъ пара, будучи сложена съ прежней парой G', дастъ пару съ моментомъ большимъ чѣмъ G'.

Итакъ, *пара G' есть наименьшая пара.* Нетрудно видѣть, что моментъ наименьшей пары $G'=G\cos\alpha$, гдѣ G—какая угодно равнодѣйствующая пара, а α—уголъ, образуемый ея осью съ центральной осью системы паръ.

Равнодѣйствующая сила R и ось G' равнодѣйствующей пары, перпендикулярной къ ея направленію, совпадаютъ въ одну прямую. Такая совокупность силы и пары называется *динамой* или *силовымъ винтомъ.* Послѣднее названіе объясняется тѣмъ, что при ввинчиваніи винта, бурава и проч., мы дѣйствуемъ одновременно силой, идущей по оси винта и двигающей его поступательно, и парой, вращающей винтъ въ плоскости, перпендикулярной къ его оси.

§ 164. Частные случаи сложенія произвольной системы силъ.

I. Приведеніе къ одной равнодѣйствующей силѣ. Если по приведеніи всѣхъ силъ къ одной силѣ R и парѣ G окажется, что онѣ лежатъ въ *одной* плоскости, то *такую систему всегда можно привести къ одной равнодѣйствующей силѣ*, равной по величинѣ и направленію силѣ R, но приложенной къ другой точкѣ.



Фиг. 93.

Дѣйствительно, сложивъ силу R съ одною изъ силъ P пары $G=Pp$ (фиг. 93), получимъ равнодѣйствующую R'. Перенеся эту силу по ея направленію до пересѣченія въ точкѣ O со второй силой P пары и сложивъ эти силы, получимъ окончательную равнодѣйствующую R'', равную и параллельную силѣ R. Тотъ же самый результатъ можно было получить и другимъ путемъ, а именно, перенеся силу R въ такую точку O', чтобы образовавшаяся при этомъ пара (R, R)

была равна по величинѣ и противоположна по направленію парѣ Pp. Тогда обѣ эти пары взаимно уничтожатся и получится одна сила R, приложенная въ точкѣ O'.

Примѣчаніе. Въ общемъ случаѣ, когда равнодѣйствующая сила R и равнодѣйствующая пара $G = Pp$ не лежатъ въ одной плоскости, *такую систему можно всегда привести къ двумъ силамъ, не лежащимъ въ одной плоскости.* Дѣйствительно, сложивъ силу R съ первой силой P пары, получимъ равнодѣйствующую R', лежащую въ другой плоскости, чѣмъ сила P, а, слѣдовательно, не пересѣкающуюся со второй силой P пары. Итакъ, данная система силъ приводится съ двумъ силамъ R' и P, не лежащимъ въ одной плоскости и потому не складывающимся въ одну равнодѣйствующую.

II. Приведеніе къ одной равнодѣйствующей парѣ. Если всѣ силы, перенесенныя въ центръ приведенія, взаимно уничтожаются, т.-е. если равнодѣйствующая ихъ $R = O$, а получившіяся при этомъ пары не уничтожаются, то сложивъ ихъ, получимъ одну равнодѣйствующую пару G.

§ 165. **Условія равновѣсія свободнаго твердаго тѣла.** Такъ какъ система силъ, приложенныхъ къ свободному твердому тѣлу, въ общемъ случаѣ приводится къ одной равнодѣйствующей силѣ R и одной равнодѣйствующей парѣ G, то, очевидно, что это тѣло одновременно побуждается равнодѣйствующей силой къ поступательному движенію по ея направленію и равнодѣйствующей парой къ вращательному движенію въ плоскости этой пары *). Слѣдовательно, условія равновѣсія свободнаго тѣла, очевидно, состоятъ въ томъ что одновременно, какъ равнодѣйствующая сила, такъ и моментъ равнодѣйствующей пары должны равняться нулю, т.-е.

$$R = O \text{ и } G = O. \qquad (1).$$

Иными словами, для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы какъ силы, перенесенныя параллельно самимъ себѣ въ одну

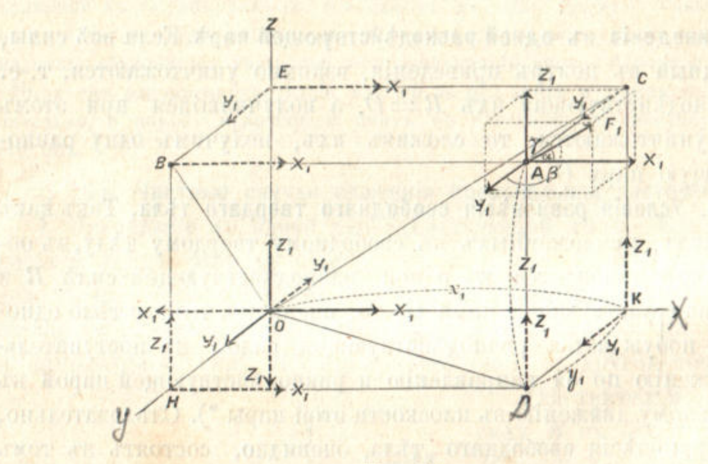
*) Отсюда никакъ *нельзя выводить того заключенія*, что, если всѣ силы приводятся *къ одной только равнодѣйствующей*, то тѣло непремѣнно получитъ *одно только поступательное движеніе* по направленію этой силы. Наоборотъ, въ динамикѣ будетъ доказано, что *всякая сила, если только она не приложена* къ *центру инерціи (центру тяжести) свободнаго тѣла*, разлагаясь на силу и пару, сообщаетъ тѣлу одновременно *поступательное и вращательное движенія*.

точку, взаимно уничтожались, такъ и получившiяся при этомъ пары также взаимно уничтожались.

Выражая эти же условiя *геометрически*, можемъ сказать, что *для равновѣсiя свободнаго твердаго тѣла необходимо и достаточно, чтобы многоугольникъ слагающихъ силъ и многоугольникъ осей слагающихъ паръ замыкались сами собою.*

Выразимъ теперь условiя равновѣсiя *аналитически.*

§ 166. **Аналитическое опредѣленiе условiй равновѣсiя.** Положимъ, что къ нѣкоторому свободному твердому тѣлу приложено въ различныхъ его точкахъ n различныхъ силъ $F_1, F_2, \ldots F_n$. Проведемъ изъ произвольно взятой точки O этого тѣла три взаимно перпендикулярныя оси координатъ OX, OY и OZ (фиг. 94). Пусть ко-



Фиг. 94.

ординаты точки A приложенiя одной изъ данныхъ силъ F_1 будутъ x_1, y_1, z_1, а углы, образуемые направленiемъ этой силы съ осями координатъ, будутъ α_1, β_1, γ_1.

Разложимъ эту силу по правилу параллелепипеда на три слагающiя силы X_1, Y_1, Z_1, параллельныя направленiямъ одноименныхъ осей координатъ, и затѣмъ перенесемъ эти слагающiя по ихъ направленiямъ до пересѣченiя съ соотвѣтствующими координатными плоскостями, т.-е. силу X_1 въ точку B ея пересѣченiя съ плоскостью YOZ, силу Y_1 въ точку C пересѣченiя съ плоскостью XOZ и силу Z_1 въ точку D пересѣченiя съ плоскостью

XOY. Наконецъ перенеся всѣ эти силы въ начало O координатъ, получимъ въ этой точкѣ три силы X_1, Y_1, Z_1 и три пары: (X_1, X_1) съ плечомъ OB, (Y_1, Y_1) съ плечомъ OC и (Z_1, Z_1) съ плечомъ OD *).

Разложимъ пару (X_1, X_1) по правилу параллелограмма на двѣ слагающія: пару (X_1, X_1) съ плечомъ $OE = z_1$, лежащую въ плоскости XOZ и пару (X_1, X_1) съ плечомъ $OH = y_1$, лежащую въ плоскости XOY. Принимая во вниманіе направленія вращенія этихъ паръ, найдемъ, что моменты ихъ будутъ $X_1 z_1$ и $-X_1 y_1$.

Точно также разложимъ вторую пару (Y_1, Y_1) на двѣ слагающія: пару (Y_1, Y_1) въ плоскости XOY съ плечомъ $OK = x_1$ и пару (Y_1, Y_1) въ плоскости YOZ съ плечомъ $OE = z_1$. Моменты этихъ паръ равны Yx_1 и $Y_1 z_1$.

Наконецъ разложимъ третью пару (Z_1, Z_1) на слагающія: пару (Z_1, Z_1) въ плоскости XOZ съ плечомъ $OK = x_1$ и моментомъ— $Z_1 x_1$ и пару (Z_1, Z_1) въ плоскости YOZ съ плечомъ $OH = y_1$ и моментомъ $Z_1 y_1$.

Такимъ образомъ въ каждой изъ координатныхъ плоскостей получаются по двѣ пары. Сложивъ ихъ, получимъ,

въ плоскости YOZ пару съ моментомъ $Z_1 y_1 - Y_1 z_1$;
„ „ XOZ „ „ „ $X_1 z_1 - Z_1 x_1$;
„ „ XOY „ „ „ $Y_1 x_1 - X_1 y_1$.

Сдѣлавъ тоже самое съ каждой изъ остальныхъ силъ F_2, F_3,... F_n, найдемъ совершенно подобныя же выраженія для составляющихъ силъ, сходящихся въ точкѣ O, и для составляющихъ паръ, расположенныхъ въ координатныхъ плоскостяхъ.

Сложивъ всѣ силы, направленныя по каждой изъ осей, а также всѣ пары, лежащія въ каждой изъ координатныхъ плоскостей, получимъ три силы:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n = \Sigma X = \Sigma_1^n F\cos\alpha,$$
$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_n = \Sigma Y = \Sigma_1^n F\cos\beta,$$
$$Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_n = \Sigma Z = \Sigma_1^n F\cos\gamma,$$

*) Очевидно, что плечи OB, OC и OD, какъ діагонали граней параллелепипеда, соотвѣтственно перпендикулярны его ребрамъ, по которымъ направлены силы X_1, Y_1 и Z_1.

три пары:

$$G_x = \Sigma\,(Zy - Yz);\ G_y = \Sigma\,(Xz - Zx);\ G_z = \Sigma\,(Yx - Xy)\,^{*}).$$

Наконецъ, сложивъ по правилу параллелепипеда эти послѣднія силы и пары, найдемъ слѣдующія выраженія для равнодѣйствующей силы R и момента G равнодѣйствующей пары:

$$R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}.$$

$$G = \sqrt{[\Sigma(Zy - Yz)]^2 + [\Sigma(Xz - Zx)]^2 + [\Sigma(Yx - Xy)]^2}.$$

Такимъ образомъ, какъ легко видѣть, изъ основныхъ условій равновѣсія $R = 0$ и $G = 0$, непосредственно вытекаютъ **) шесть уравненій:

$$\Sigma X = 0 \quad (1) \qquad \Sigma(Zy - Yz) = 0 \quad (4).$$

$$\Sigma Y = 0 \quad (2) \qquad \Sigma(Xz - Zx) = 0 \quad (5).$$

$$\Sigma Z = 0 \quad (3) \qquad \Sigma(Yx - Xy) = 0 \quad (6).$$

Эти уравненія и называются *основными уравненіями равновѣсія* свободнаго твердаго тѣла.

§ 167. Другой видъ уравненій равновѣсія.

Уравненіямъ равновѣсія часто даютъ другой видъ болѣе удобный для запоминанія и для примѣненія. Для этого замѣнимъ выраженія ΣX, ΣY и ΣZ, т.-е. суммы проекцій приложенныхъ силъ F_1, F_2,... F_n на оси координатъ равносильными имъ выраженіями ΣF_x, ΣF_y и ΣF_z, а затѣмъ докажемъ, что уравненія (4), (5) и (6) представляютъ ничто иное какъ *суммы моментовъ приложенныхъ силъ относительно осей* координатъ. Дѣйствительно, принявъ во вниманіе, что моментъ равнодѣйствующей относительно какой-либо оси равенъ суммѣ моментовъ составляющихъ относительно той же

---

*) Для облегченія составленія выраженій осей паръ G_x, G_y и G_z рекомендуется слѣдующій пріемъ. Размѣстимъ въ видѣ треугольника большія и малыя буквы такимъ образомъ $\begin{matrix} & Y,y & \\ X,x & & Z,z \end{matrix}$. Для составленія выраженія G_x возьмемъ большую букву, предшествующую X, считая по направленію движенія часовой стрѣлки, т.-е. Z (силу), а затѣмъ малую букву, предшествующую Z, т.-е. y (координату). Выраженіе Zy представляетъ 1-ую часть момента пары G_x. Вторая часть (со знакомъ—) состоитъ изъ тѣхъ же буквъ, но въ обратномъ порядкѣ. Итакъ $G_x = Zy - Yz$. Точно также составляются выраженія для G_y и G_z.

**) Такъ какъ сумма квадратовъ алгебраическихъ количествъ только тогда равна нулю, когда сами эти количества порознь равны нулю.

самой оси, составимъ выраженія моментовъ силы F_1, какъ равнодѣйствующей силъ X_1, Y_1 и Z_1 относительно каждой изъ трехъ осей координатъ.

Перенесемъ силы X_1, Y_1 и Z_1 по ихъ направленіямъ въ точки B, C и D и замѣтимъ, что моменты каждой изъ этихъ силъ относительно параллельныхъ имъ осей OX, OY и OZ равны нулю. Поэтому моментъ силы F_1 относительно оси OX или

$$M_x F_1 = M_x Y_1 + M_x Z_1 \text{ и точно также}$$
$$M_y F_1 = M_y X_1 + M_y Z_1$$
$$M_z F_1 = M_z X_1 + M_z Y_1$$

Но, какъ легко видѣть, $M_x Y_1 = -Y_1 z_1$; $M_x Z_1 = Z_1 y_1$; $M_y X_1 = X_1 z_1$; $M_y Z_1 = -Z_1 x_1$; $M_z X_1 = -X_1 y_1$; $M_z Y_1 = Y_1 x_1$.

Написавъ совершенно подобныя же выраженія для моментовъ остальныхъ силъ F_2, $F_3 \ldots F_n$ и сложивъ однородные моменты, получимъ, что

$$\Sigma(Zy - Yz) = \Sigma M_x F;\ \Sigma(Xz - Zx) = \Sigma M_y F;\ (Yx - Xy) = \Sigma M_z F$$

Такимъ образомъ уравненія равновѣсія можно представить въ такомъ видѣ:

$$\Sigma F_x = 0 \quad (1) \qquad\qquad \Sigma M_x F = 0 \quad (4)$$
$$\Sigma F_y = 0 \quad (2) \qquad \text{и} \qquad \Sigma M_y F = 0 \quad (5)$$
$$\Sigma F_z = 0 \quad (3) \qquad\qquad \Sigma M_z F = 0 \quad (6).$$

Итакъ для равновѣсія свободнаго твердаго тѣла необходимо, чтобы:

1. *алгебраическая сумма проекцій всѣхъ силъ на каждую изъ трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей равнялась нулю* и

2. *алгебраическая сумма моментовъ всѣхъ силъ относительно каждой изъ трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей равнялась нулю.*

§ 168. Легко замѣтить, что найденныя шесть уравненій не только *необходимы*, но и *достаточны* для равновѣсія. Дѣйствительно, основныя условія равновѣсія $R = 0$ и $G = 0$, т.-е. равнодѣйствующая сила и ось равнодѣйствующей пары должны быть равны нулю, удовлетворяются только въ томъ случаѣ, когда проекціи R и G на *любую ось* будутъ равны нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, проекціи R и G на одну или даже на двѣ взаимно перпендикулярныя оси могутъ равняться нулю, когда сами

величины R и G не равны нулю, но перпендикулярны къ этимъ осямъ. Итакъ, двухъ или четырехъ уравненій проекцій и моментовъ силъ недостаточно для выраженія условій равновѣсія. Но такъ какъ прямая не можетъ быть одновременно перпендикулярна къ тремъ взаимно-перпендикулярнымъ осямъ, то шесть уравненій вполнѣ достаточны для опредѣленія равновѣсія. Изъ первыхъ трехъ уравненій необходимо слѣдуетъ, что $R=0$, а изъ трехъ послѣднихъ, что $G=0$.

§ 169. **Частные случаи равновѣсія.**

I. Всѣ силы лежатъ въ одной плоскости. Расположимъ три оси координатъ такимъ образомъ, чтобы плоскость XOY совпала съ плоскостью дѣйствія силъ. При этомъ уравненіе $\Sigma F_z=0$ *всегда удовлетворяется* само собой, такъ какъ проекціи силъ на ось OZ всегда будутъ $=0$.

Точно также *всегда удовлетворяются* сами собой уравненія (4) и (5) $\Sigma M_x F=O$ и $\Sigma M_y F=O$, такъ какъ данныя силы лежатъ въ плоскости осей OX и OY и слѣдовательно моменты силъ относительно этихъ осей всегда$=0$. Итакъ, въ этомъ случаѣ для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись только три уравненія

$$\Sigma F_x=0; \qquad \Sigma F_y=0; \qquad \Sigma M_z F=0.$$

Эти уравненія можно получить и непосредственно. Для этого проведемъ въ плоскости силъ оси OX и OY, перенесемъ всѣ данныя силы въ начало O координатъ и сложимъ всѣ получившіяся при этомъ силы и пары въ одну равнодѣйствующую силу R и одну равнодѣйствующую пару G, лежащія въ одной плоскости XOY.

Какъ извѣстно, равнодѣйствующая сила $R=\sqrt{(\Sigma F_x)+(\Sigma F_y)^2}$, гдѣ ΣF_x и ΣF_y суть суммы проекцій всѣхъ данныхъ силъ на оси OX и OY. Моментъ равнодѣйствующей пары $G=$алгебр. суммѣ моментовъ всѣхъ слагающихъ паръ $=$ алгебр. суммѣ моментовъ всѣхъ силъ относительно оси OZ или, что все равно, относительно точки O (такъ какъ всѣ силы и пары лежатъ въ одной плоскости XOY), т.-е. $G=\Sigma M_z F$.

Такимъ образомъ изъ основныхъ условій равновѣсія $R=O$ и $G=O$ получимъ три уравненія:

$$\Sigma F_x=0; \qquad \Sigma F_y=0, \qquad \Sigma M_z F=0.$$

Теорема моментовъ относительно трехъ точекъ. Для опредѣленія равновѣсія свободнаго тѣла, къ которому приложены силы, лежащія въ одной плоскости, пользуются еще слѣдующей теоремой:

Для равновѣсія силъ, лежащихъ въ одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментовъ всѣхъ силъ относительно каждой изъ трехъ точекъ, произвольно взятыхъ въ этой плоскости и не лежащихъ на одной прямой, равнялась нулю.

Положимъ, что въ плоскости силъ F_1, F_2, ... F_n взяты такія три точки A, B, C и что

$\sum M_A F = 0$... (1); $\sum M_B F = 0$... (2) и $\sum M_C F = 0$... (3).

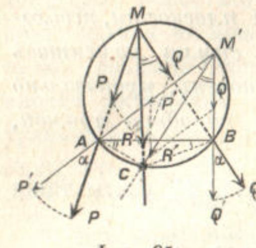
Изъ равенства $\sum M_A F = 0$ заключаемъ, что моментъ равнодѣйствующей R всѣхъ силъ относительно точки A равенъ нулю, что возможно въ *двухъ* случаяхъ: или равнодѣйствующая $R = 0$, или она проходитъ черезъ точку A (т.-е. плечо равнодѣйствующей равно нулю).

Присоединяя равенство $\sum M_B F = 0$, заключаемъ точно такимъ же образомъ, что или равнодѣйствующая R равна нулю, или она проходитъ черезъ точки A и B. Наконецъ присоединивъ сюда и третье условіе, выражаемое равенствомъ $\sum M_C F = 0$, находимъ, что равнодѣйствующая или равна нулю, или проходитъ черезъ три точки A, B и C. Послѣднее однако невозможно, такъ какъ эти точки не лежатъ на одной прямой. Итакъ, равнодѣйствующая R равна нулю, т.-е. всѣ приложенныя силы взаимно уравновѣшиваются.

Примѣчаніе 1. Чтобы сложить графически нѣсколько силъ, лежащихъ въ одной плоскости, складываютъ по правилу параллелограмма попарно, въ какомъ угодно порядкѣ, силы и ихъ равнодѣйствующія. Въ конечномъ результатѣ получается или одна равнодѣйствующая сила, или одна пара силъ, или (*случай равновѣсія*) двѣ равныя и прямо-противоположныя силы, взаимно уничтожающіяся. Подобный способъ однако рѣдко производится на практикѣ, такъ какъ въ случаѣ большого числа силъ онъ приводитъ къ неудобнымъ построеніямъ. Въ этихъ случаяхъ находятъ равнодѣйствующую посредствомъ особаго построенія, называемаго способомъ *веревочнаго многоугольника*, къ изученію котораго мы перейдемъ впослѣдствіи.

Примѣчаніе 2. Если силы, лежащія въ одной плоскости, имѣютъ одну равнодѣйствующую, то между точками, лежащими на ея направленіи, существуетъ одна точка, называемая **центромъ системы силъ**, обладающая тѣмъ замѣчательнымъ свойствомъ, что, при поворотѣ всѣхъ данныхъ силъ около ихъ точекъ приложенія на одинъ и тотъ же произвольный уголъ, равнодѣйствую-

щая, вращаясь на тотъ же самый уголъ, всегда проходитъ черезъ эту точку. Докажемъ существованіе такого центра для двухъ сходящихся силъ P и Q, приложенныхъ въ точкахъ A и B (фиг. 95). Перенесемъ эти силы въ общую точку M схода, найдемъ ихъ равнодѣйствующую R и на прямой AB, какъ на хордѣ, построимъ дугу, вмѣщающую уголъ AMB. Точка C пересѣченія равнодѣйствующей съ дугою ACB и есть искомый центръ силъ P и Q.



Фиг. 95.

Дѣйствительно, повернемъ силы P и Q около точекъ A и B на одинъ и тотъ же произвольный уголъ α и построимъ ихъ равнодѣйствующую R'. Такъ какъ уголъ $AM'B$=углу AMB, то вершина M' будетъ лежать на дугѣ AMB. Углы PMR и $P'M'R'$ принадлежащіе равнымъ треугольникамъ, равны между собою и, слѣдовательно, соотвѣтствуютъ одной и той же дугѣ AC, такъ что прямая $M'R'$, такъ же какъ и прямая MR, проходитъ черезъ точку C.

Итакъ, при вращеніи силъ P и Q на одинаковые углы, точка схода ихъ перемѣщается по дугѣ AMB, а равнодѣйствующая всегда проходитъ черезъ одну и ту же точку C.

Треугольникъ ABC, образуемый прямыми, соединяющими центръ 2-хъ силъ и ихъ точки приложенія, очевидно, подобенъ треугольнику PMR. Слѣдовательно $AC:BC=Q:R$. Отсюда заключаемъ, что при $P=Q$ треугольникъ ABC будетъ равнобедренный.

Если дано нѣсколько силъ, то, находя послѣдовательно центръ каждыхъ двухъ силъ и ихъ равнодѣйствующихъ, получимъ центръ всѣхъ данныхъ силъ.

II. Всѣ силы сходятся въ одной точкѣ. Въ этомъ случаѣ, проведя черезъ эту точку O три взаимно перпендикулярныя оси OX, OY и OZ, замѣтимъ, что всѣ три уравненія (4), (5) и (6) моментовъ силъ удовлетворяются сами собою, такъ какъ въ точкѣ O всѣ силы пересѣкаются съ осями. Итакъ, для равновѣсія такой системы силъ необходимо и достаточно существованіе трехъ уравненій

$$\Sigma F_x=0; \qquad \Sigma F_y=0; \qquad \Sigma F_z=0.$$

Такое заключеніе вытекаетъ и непосредственно изъ того соображенія, что въ случаѣ силъ, сходящихся въ одной точкѣ, не можетъ образоваться пара силъ, такъ какъ сходящіяся силы всегда складываются въ одну равнодѣйствующую R, которая въ случаѣ равновѣсія должна равняться нулю.

Итакъ $\quad R=\sqrt{(\Sigma F_x)^2+(\Sigma F_y)^2+(\Sigma F_z)^2}=0,$

откуда слѣдуетъ, что $\quad \Sigma F_x=0;\ \Sigma F_y=0$ и $\Sigma F_z=0.$

III. Всѣ силы параллельны между собою. Предположимъ сперва, что данныя силы не лежатъ въ одной плоскости. Проведемъ три

координатныя оси такъ, чтобы одна изъ нихъ, напр. ось OZ, была параллельна общему направленію силъ. При этомъ изъ шести уравненій равновѣсія три, а именно (1), (2) и (6) удовлетворяются сами собой. Проекціи силъ, параллельныхъ оси OZ, на оси OX и OY всегда равны нулю, точно также какъ будутъ равны нулю и моменты этихъ силъ относительно оси OZ.

Итакъ, для равновѣсія тѣла въ этомъ случаѣ необходимо и достаточно существованіе трехъ уравненій:

$$\Sigma F_z = 0; \qquad \Sigma M_x F = 0; \qquad \Sigma M_y F = 0.$$

Если всѣ данныя параллельныя силы лежатъ *въ одной* плоскости, то координатныя оси слѣдуетъ провести такъ, чтобы двѣ изъ нихъ, напр. OX и OZ, лежали въ этой плоскости, тогда уравненіе $\Sigma M_x F = 0$ удовлетворяется само собою и слѣдовательно для равновѣсія тѣла необходимы и достаточны только два уравненія

$$\Sigma F_z = 0; \qquad \Sigma M_y F = 0.$$

Равновѣсіе несвободнаго твердаго тѣла.

§ 170. Свободныя твердыя тѣла, могущія двигаться безпрепятственно по всѣмъ направленіямъ, на практикѣ встрѣчаются въ довольно рѣдкихъ случаяхъ *). Возможность свободно перемѣщаться по какому угодно направленію у большей части земныхъ предметовъ бываетъ обыкновенно ограничена существованіемъ различнаго рода препятствій (связей, опоръ), вслѣдствіе чего всѣ такія тѣла называются *несвободными*.

Разнообразныя препятствія, ограничивающія свободу перемѣщеній тѣлъ, сводятся къ слѣдующимъ тремъ главнымъ видамъ сопротивленій. Тѣло несвободно, когда оно имѣетъ: 1) одну неподвижную точку; 2) двѣ неподвижныя точки или неподвижную ось; 3) когда оно опирается одной или нѣсколькими точками на неподвижную плоскость или вообще на какую-нибудь поверхность.

Само собою понятно, что несвободное твердое тѣло будетъ находиться въ равновѣсіи не только въ томъ случаѣ, когда всѣ приложенныя къ нему силы *взаимно* уравновѣшиваются (какъ это

---

*) Сюда относятся напр. тѣла, свободно движущіяся въ газахъ, жидкостяхъ или въ безвоздушномъ пространствѣ.

необходимо для свободнаго тѣла), но и тогда, *когда эти силы уравновѣшиваются сопротивленiемъ его неподвижныхъ связей или опоръ* *). Такъ какъ однако силы могутъ уравновѣшиваться только силами, то, слѣдовательно, сопротивленiя связей или опоръ несвободнаго тѣла мы должны разсматривать тоже какъ силы. По закону равенства дѣйствiя и противодѣйствiя *силы сопротивленiй* (или силы реакцiй) связей и опоръ равны и прямо-противоположны производимымъ на эти связи и опоры давленiямъ отъ совокупнаго дѣйствiя приложенныхъ къ тѣлу силъ.

Такимъ образомъ силы сопротивленiй всецѣло зависятъ отъ величины и направленiя приложенныхъ силъ и могутъ быть опредѣлены слѣдующимъ образомъ. Принявъ во вниманiе силы сопротивленiй, мы можемъ несвободное тѣло разсматривать какъ свободное и примѣнить къ нему шесть извѣстныхъ уравненiй равновѣсiя. Одна часть этихъ уравненiй, въ составъ которыхъ будутъ входить только однѣ данныя приложенныя силы, будетъ выражать собственно условiя равновѣсiя несвободнаго тѣла; другая часть уравненiй, въ составъ которыхъ будутъ входить данныя приложенныя силы и силы сопротивленiй, разсматриваемыя какъ неизвѣстныя, будетъ служить для опредѣленiя этихъ неизвѣстныхъ.

Можетъ однако случиться, что число уравненiй второй группы будетъ *недостаточно* для опредѣленiя силъ сопротивленiй, такъ какъ число связей или опоръ можетъ быть неограниченно, а всѣхъ уравненiй равновѣсiя только шесть.

§ 171. **Равновѣсiе тѣла, имѣющаго одну неподвижную точку.** Такъ какъ тѣло, имѣющее неподвижную точку, можетъ только вращаться около произвольной оси, проходящей черезъ эту точку, то очевидно, что для равновѣсiя такого тѣла необходимо и достаточно, чтобы всѣ приложенныя силы приводились къ одной равнодѣйствующей, проходящей черезъ неподвижную точку или иначе, чтобы алгебраическая сумма моментовъ всѣхъ приложенныхъ силъ относительно каждой изъ трехъ взаимно перпендику-

---

*) Часто употребляютъ не совсѣмъ правильное выраженiе: силы *уничтожаются* сопротивленiемъ связей или опоръ. *Силы не могутъ уничтожаться.* Встрѣчая непреодолимыя препятствiя къ движенiю, онѣ проявляютъ однако свое дѣйствiе въ видѣ давленiя на эти связи или опоры.

лярныхъ осей, пересѣкающихся въ неподвижной точкѣ, была равна нулю, т.-е. чтобы

$$\Sigma M_x F = 0; \quad \Sigma M_y F = 0; \quad \Sigma M_z F = 0.$$

Такъ какъ равнодѣйствующая R уравновѣшивается силой сопротивленія R' неподвижной точки, то слѣдовательно сила R' равна по величинѣ и противоположна по направленію равнодѣйствующей R, т.-е. $R' = R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2}$.

Этотъ же результатъ можно получить и другимъ путемъ. Обозначимъ черезъ α, β и γ углы, составленные силой сопротивленія R' съ осями координатъ, и напишемъ три остальныя уравненія равновѣсія даннаго тѣла, разсматриваемаго какъ свободное.

$$\Sigma F_x + R' \cos \alpha = 0; \quad \Sigma F_y + R' \cos \beta = 0; \quad \Sigma F_z + R' \cos \gamma = 0,$$

откуда $R' \cos \alpha = - \Sigma F_x$; $R' \cos \beta = - \Sigma F_y$; $R' \cos \gamma = - \Sigma F_z$.

Возвысивъ обѣ части каждаго изъ этихъ уравненій въ квадратъ и сложивъ ихъ, получимъ

$$R'^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = (\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2$$

или, зная, что $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$,

$$R' = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2}.$$

Если тѣло подвержено дѣйствію только собственнаго вѣса, сосредоточеннаго, какъ извѣстно, въ центрѣ тяжести и направленнаго по вертикали, то для равновѣсія такого тѣла необходимо и достаточно, чтобы центръ тяжести его находился на одной вертикали съ неподвижной точкой. Дѣйствительно, при этомъ моментъ вѣса относительно этой точки, а слѣдовательно и относительно каждой изъ трехъ проходящихъ черезъ нее взаимно перпендикулярныхъ осей будетъ равенъ нулю.

§ 172. **Равновѣсіе тѣла, имѣющаго неподвижную ось.** Тѣло, имѣющее неподвижную ось, можетъ или только вращаться около нея, или вращаться и скользить вдоль нея.

Очевидно, что въ первомъ случаѣ для равновѣсія тѣла необходимо и достаточно, чтобы сумма моментовъ приложенныхъ къ нему силъ относительно этой оси была равна нулю, т.-е. чтобы

$$\Sigma M_x F = 0,$$

гдѣ x — неподвижная ось.

Чтобы тѣло не могло двигаться вдоль оси, необходимо, чтобы алгебраическая сумма проекцій на эту ось всѣхъ приложенныхъ силъ равнялась нулю, т.-е. чтобы

$$\Sigma F_x = 0.$$

Если на тѣло дѣйствуетъ только его собственный вѣсъ, то очевидно, что для равновѣсія тѣла необходимо и достаточно, чтобы центръ тяжести его находился въ одной вертикальной плоскости съ неподвижной осью.

§ 173. **Равновѣсіе тѣла, опирающагося на неподвижную плоскость или поверхность.**

I. Если тѣло опирается на неподвижную плоскость или поверхность **одной** точкой, то для равновѣсія его необходимо: 1) чтобы всѣ приложенныя къ нему силы приводились къ одной равнодѣйствующей, проходящей черезъ точку опоры и 2) чтобы направленіе этой равнодѣйствующей было перпендикулярно (нормально) къ опорной плоскости или поверхности.

Первое условіе очевидно само по себѣ. Чтобы выяснить необходимость второго условія, предположимъ, что направленіе равнодѣйствующей будетъ наклонно къ опорной плоскости. Разложивъ эту равнодѣйствующую на двѣ слагающія силы, одну перпендикулярную плоскости и другую параллельную плоскости, найдемъ, что первая сила уравновѣсится сопротивленіемъ плоскости, а вторая приведетъ тѣло въ движеніе по плоскости.

Замѣтивъ, что направленіе сопротивленія опорной плоскости или поверхности всегда перпендикулярно или нормально къ плоскости или поверхности, легко доказать двѣ слѣдующія теоремы:

II. Если тѣло опирается на плоскость **двумя точками**, то для равновѣсія его необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая всѣхъ приложенныхъ силъ была перпендикулярна къ плоскости и проходила черезъ прямую, соединяющую обѣ точки опоры.

III. Если тѣло опирается на плоскость **тремя или болѣе точками**, то для равновѣсія его необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая всѣхъ приложенныхъ силъ была перпендикулярна къ этой плоскости и проходила *внутри* периметра многоугольника, образуемаго прямыми, соединяющими точками опоры.

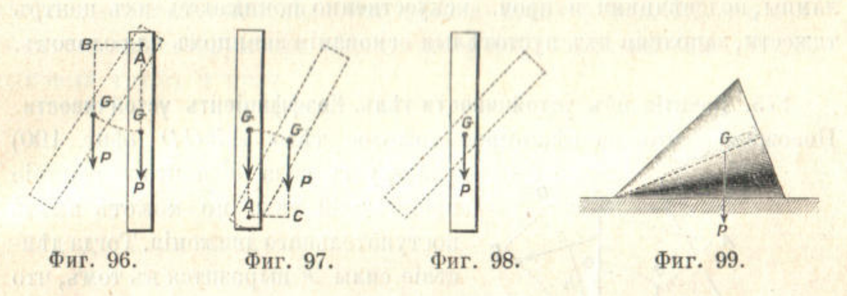
§ 174. **Различные виды равновѣсія несвободныхъ тяжелыхъ тѣлъ.** Въ несвободныхъ тѣлахъ, подверженныхъ дѣйствію только собственнаго вѣса, различаютъ три вида равновѣсія:

1. *Устойчивое*, когда тѣло, выведенное изъ первоначальнаго положенія равновѣсія, возвращается само вновь въ это положеніе;

2. *неустойчивое*, когда такое тѣло не возвращается въ первоначальное положеніе и падаетъ;

3. *безразличное*, когда тѣло сохраняетъ равновѣсіе въ любомъ своемъ положеніи.

Покажемъ, что равновѣсіе тѣла будетъ *устойчивымъ*, если при отклоненіи его отъ положенія равновѣсія центръ тяжести его *повышается*; *неустойчивымъ*, если при этомъ центръ тяжести *понижается*; *безразличнымъ*, если центръ тяжести остается постоянно *на одинаковой высотѣ*.



Фиг. 96. Фиг. 97. Фиг. 98. Фиг. 99.

Дѣйствительно, какъ видно изъ фиг. 96, если центръ тяжести тѣла повышается, то вѣсъ P тѣла образуетъ относительно неподвижной точки A моментъ $= P.AB$, приближающій тѣло къ его первоначальному положенію.

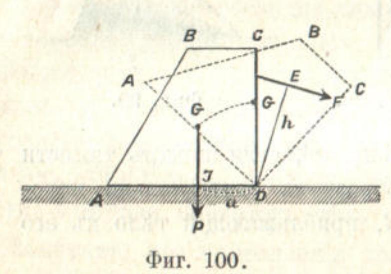
Наоборотъ, если центръ тяжести понижается, то (фиг. 97) образующійся при этомъ моментъ вѣса $= P.AC$ удаляетъ тѣло отъ его первоначальнаго положенія.

Наконецъ, если центръ тяжести тѣла не измѣняетъ своей высоты (что̀ происходитъ, когда онъ совпадаетъ съ неподвижной точкой или неподвижной осью тѣла, или когда это обусловливается формою тѣла, какъ напр., въ случаѣ шара, а также цилиндра и конуса, лежащихъ своими образующими на горизонтальной плоскости), то (фиг. 98 и 99) сила тяжести P никакого момента не образуетъ и, слѣдовательно, тѣло остается въ равновѣсіи въ любомъ своемъ положеніи.

Тяжелое тѣло стоящее на горизонтальной плоскости (фиг. 100), при вращеніи его около одного изъ реберъ основанія, будетъ находиться въ положеніи *устойчиваго равновѣсія* до тѣхъ поръ, пока центръ тяжести его не будетъ въ одной вертикальной плоскости съ ребромъ вращенія. Въ этотъ моментъ тѣло будетъ находиться въ положеніи *неустойчиваго равновѣсія*, такъ какъ при отклоненіи тѣла изъ этого положенія въ ту или другую сторону центръ тяжести его будетъ понижаться. Отсюда слѣдуетъ, что такое тѣло будетъ тѣмъ *устойчивѣе*, т.-е. тѣмъ болѣе сохранять положеніе устойчиваго равновѣсія, чѣмъ ниже лежитъ его центръ тяжести, такъ какъ въ этомъ случаѣ, тѣмъ бо̀льшую дугу будетъ описывать центръ тяжести, чтобы достигнуть положенія неустойчиваго равновѣсія.

Поэтому, чтобы увеличить устойчивость такихъ предметовъ, какъ лампы, подсвѣчники и проч., искусственно понижаютъ ихъ центръ тяжести, заполняя ихъ пустотѣлыя основанія свинцомъ или оловомъ.

175. **Понятіе объ устойчивости тѣлъ. Коэффиціентъ устойчивости.** Положимъ, что на нѣкоторое тяжелое тѣло $ABCD$ (фиг. 100) дѣйствуетъ сила F и что вслѣдствіе препятствій тѣло не можетъ имѣть поступательнаго движенія. Тогда дѣйствіе силы F выразится въ томъ, что она будетъ стремиться опрокинуть тѣло, вращая его около ребра, проходящаго черезъ точку D.



Фиг. 100.

Допустимъ для простоты, что фиг. 100 представляетъ сѣченіе тѣла плоскостью, проходящей черезъ его центръ тяжести G и что сила F лежитъ въ этой плоскости. Тогда опрокидывающій моментъ силы F относительно точки D будетъ $= F \,.\, DE = Fh$. Ему сопротивляется моментъ вѣса P относительно той же точки, равный $P \,.\, DJ = Pa$. Для равновѣсія необходимо, чтобы $Fh = Pa$.

Моментъ Pa, сопротивляющійся опрокидыванію тѣла, представляетъ статическую мѣру устойчивости тѣла. Его называютъ поэтому *моментомъ устойчивости* тѣла. Итакъ, моментъ устойчивости равенъ произведенію изъ вѣса тѣла на плечо его относительно точки или ребра вращенія.

Какъ видно изъ чертежа, наше тѣло имѣетъ бо́льшую устойчивость относительно ребра, проходящаго черезъ точку A, чѣмъ относительно ребра, проходящаго черезъ точку D, такъ какъ плечо $AJ >$ плеча DJ.

Полезно также замѣтить, что моментъ устойчивости быстро уменьшается (вслѣдствіе уменьшенія плеча) по мѣрѣ увеличенія угла вращенія центра тяжести тѣла и обращается въ нуль, когда центръ тяжести будетъ находиться въ одной вертикальной плоскости съ ребромъ вращенія.

Отношеніе момента устойчивости къ опрокидывающему моменту, т.-е. частное $\frac{Pa}{Fh}$ называется *коэффиціентомъ устойчивости*. По коэффиціенту устойчивости можно судить о *степени устойчивости* тѣлъ подъ вліяніемъ данныхъ силъ. Поэтому опредѣленіе его величины является весьма важной задачей, въ особенности при сооруженіи такихъ построекъ, какъ высокія стѣны, дымовыя трубы и проч.

Задачи.

Кинематика.

1. Равномѣрное движенiе.

1. Какое пространство пройдетъ въ 3 часа локомотивъ, движущiйся со скоростью въ 15 метровъ.

2. На какомъ разстоянiи отъ наблюдателя находится орудiе, если выстрѣлъ слышенъ черезъ 6 секундъ послѣ появленiя огня? Скорость звука въ воздухѣ 333 метра.

3. Тѣло *A* проходитъ 18 метр. въ 4″, а тѣло *B* проходитъ 21 метр. въ 5″, Найти скорости обоихъ тѣлъ и ихъ отношенiе.

4. Плывущее по рѣкѣ тѣло проходитъ 18 саж. въ 1 мин. 24 сек. Опредѣлить скорость теченiя.

5. Пѣшехода, вышедшаго изъ дома въ 8 час. и идущаго со скоростью 1,5 метра, обгоняетъ въ 8 час. 24 мин. карета, выѣхавшая изъ того же дома въ 8 час. 16 мин. Найти скорость кареты.

6. Мальчикъ пробѣжалъ длину дорожки два раза: сперва въ одномъ направленiи со скоростью $v_1=6$ фут., а затѣмъ немедленно въ обратномъ направленiи со скоростью $v_2=9$ фут. Найти длину дорожки, если всего онъ бѣжалъ $t=15$ секундъ.

7. Платформа строгальной машины движется впередъ, т.-е. приближаясь къ рѣзцу, со скоростью 0,12 метр., а назадъ со скоростью вдвое большей. Сколько надо времени, чтобы обстрогать одинъ разъ плоскость, длина которой 2,7 м., а ширина 0,4 м., если ширина стружки 1 миллиметръ, и рѣзецъ работаетъ только при движенiи платформы впередъ.

8. Со станцiи *A* вышелъ пассажирскiй поѣздъ, идущiй со скоростью $v_1=45$ верстъ въ часъ. Спустя $t=2,5$ час. вышелъ изъ *A* по тому же направленiю курьерскiй поѣздъ, идущiй со скоростью $v_2=70$ верстъ въ часъ. Черезъ сколько времени и на какой верстѣ курьерскiй поѣздъ догонитъ пассажирскiй.

9. Со станціи A вышелъ пассажирскій поѣздъ, идущій со скоростью $v=3$ м. въ $1''$ и черезъ $t_1=5$ мин. курьерскій поѣздъ, который догоняетъ пассажирскій черезъ $t_2=20$ мин. Найти скорость курьерскаго поѣзда и разстояніе, которое будетъ между поѣздами черезъ 20 минутъ послѣ встрѣчи.

2. Равномѣрно-перемѣнныя движенія.

10. Какое разстояніе пройдетъ тѣло въ 0,1 секунды, если скорость его увеличивается въ каждую секунду на 8 футовъ. *).

11. Ускореніе равномѣрно-ускоренно движущагося тѣла$=10$ м. Найти скорость его въ началѣ 5-ой секунды.

12. Найти конечную скорость тѣла, движущагося равноускоренно въ теченіе 5 сек. съ ускореніемъ 12 м.

13. Найти ускореніе тѣла, которое, двигаясь равноускоренно, прошло въ $^1/_2$ секунды 8 футовъ.

14. Тѣло, двигаясь равноускоренно, прошло въ 30 сек. 45 метр. Найти его ускореніе.

15. Во сколько секундъ тѣло, двигающееся равноускоренно съ ускореніемъ въ 7 метр., пройдетъ 1,4 километра.

16. Тѣло, двигающееся съ ускореніемъ 20 метр., прошло 1000 метр. Найти его конечную скорость.

17. Тѣло движется съ ускореніемъ $a=12$ фут. Найти пространство, которое оно пройдетъ въ 5 секундъ и скорость его, когда оно пройдетъ 96 фут. отъ начала движенія.

18. Тѣло, двигающееся равноускоренно, прошло въ 5-ую секунду послѣ начала движенія 90 метр. Найти его ускореніе и скорость въ концѣ 10-ой секунды.

19. Сколько секундъ должно двигаться тѣло съ ускореніемъ въ 25 метр., чтобы пріобрѣсти скорость въ 1000 м.?

20. Тѣло, двигающееся равноускоренно, прошло въ двѣ слѣдующія одна за другой секунды 45 м. и 55 м. Найти пространство, проходимое имъ въ 20-ую секунду.

21. Скорость поѣзда въ разсматриваемый моментъ $v_0=4$ м., а затѣмъ она увеличивается на 0,2 м. въ секунду. Найти ско-

*) Въ задачахъ 10—22 предполагается, что тѣло начало двигаться безъ начальной скорости.

рость поѣзда черезъ 20 сек. и пространство, пройденное имъ за это время.

22. Поѣздъ, выйдя со станціи и двигаясь равноускоренно, прошелъ въ первые 40 сек. 250 метровъ. Опредѣлить его ускореніе, а также пространство, пройденное имъ въ слѣдующія 40 сек. Какая будетъ скоростью поѣзда въ концѣ 80-й секунды.

23. Съ какой скоростью начало двигаться тѣло, если скорость его уменьшается на 10 метр. въ 1″, и оно останавливается черезъ 12″.

24. Тѣло, имѣя начальную скорость=90 сантим., и двигаясь равнозамедленно, прошло 3 метра, при чемъ въ концѣ этого пути скорость его равнялась 50 сантим. Найти ускореніе движенія.

25. Поѣздъ идетъ съ замедленіемъ въ 44 версты въ часъ. Какое пространство онъ долженъ пройти, чтобы скорость его уменьшилась съ 60 до 50 верстъ въ часъ.

26. Средняя скорость тѣла, двигающагося равнозамедленно, v_c=75 см., а конечная скорость v=50 см. Найти начальную скорость.

27. Тѣло движется равнозамедленно въ теченіи $t = 90$ сек. Средняя скорость его v_c=125 м., а конечная скорость v=120 м. Найти ускореніе.

28. Найти начальную скорость тѣла, которое, двигаясь съ замедленіемъ въ 10 фут. въ секунду, останавливается, пройдя разстояніе въ 45 футовъ.

29. Найти пространство, пройденное свободно падающимъ тѣломъ въ 6 секундъ и въ 6-ую секунду. *).

30. Найти среднюю скорость тѣла, падающаго 10 секундъ: a) безъ начальной скорости; b) съ начальной скоростью v_0=4 м.

31. Съ какой высоты упало тѣло и въ теченіи какого времени оно падало, если скорость его въ моментъ удара о землю v=35 м.

32. Свободно падающее тѣло прошло 289 фут. Опредѣлить время движенія и конечную скорость.

33. Скорость свободнаго падающаго тѣла въ нѣкоторый моментъ=160 фут. Какое пространство прошло это тѣло отъ начала

---

*) Въ задачахъ на паденіе тѣлъ для упрощенія вычисленій въ русскихъ мѣрахъ принято, что $g = 32$ ф.; для вычисленій въ метрическихъ мѣрахъ g=9,8 м.

паденія и какое пространство оно пройдетъ въ слѣдующую секунду?

34. Съ какой скоростью слѣдуетъ бросить тѣло съ высоты 96 м. вертикально внизъ, чтобы оно достигло земли черезъ 3 секунды?

35. Тѣло упало съ высоты h=100 фут. Черезъ сколько секундъ оно достигнетъ земли и какова будетъ его конечная скорость.

36. Свободно падающее тѣло проходитъ въ первую секунду $^1/_4$ полной высоты паденія. Опредѣлить всю высоту и время, употребленное на паденіе.

37. Тѣло свободно падаетъ съ высоты 1000 м. Опредѣлить пространство, пройденное имъ въ послѣднюю секунду паденія.

38. Найти пространство, проходимое свободно падающимъ тѣломъ, и его конечную скорость въ $^1/_{20}$ секунды, считая отъ конца 2-й секунды паденія.

39. Свободно падающее тѣло проходитъ въ нѣкоторую секунду 336 фут. Сколько уже секундъ падало это тѣло до начала этой секунды?

40. Свободно падающее тѣло имѣло въ нѣкоторой точкѣ своего пути скорость v_1=35 м., а въ другой, ниже лежащей точкѣ, скорость v_2=371 м. Какъ велико разстояніе между этими точками и во сколько секундъ тѣло прошло это разстояніе?

41. Два тѣла начали падать одновременно изъ двухъ различныхъ точекъ, лежащихъ на одной вертикали. Показать, что при паденіи разстояніе между тѣлами не измѣняется.

42. Два тѣла начали падать изъ одной и той же точки, одно послѣ другого. Показать, что разстояніе между тѣлами во все время паденія будетъ увеличиваться.

43. Два тѣла свободно падаютъ, одно за другимъ черезъ 3 сек. Найти ихъ взаимныя разстоянія черезъ 2, 3, 4... секунды.

44. Съ вершины башни свободно падаетъ камень; черезъ секунду бросаютъ вслѣдъ за нимъ другой камень, который настигаетъ первый черезъ 1 секунду. Съ какой скоростью былъ брошенъ второй камень.

45. Стрѣла пущена вертикально вверхъ съ начальной скоростью v_0=112 фут. На какую высоту она поднимется и черезъ сколько секундъ обратно упадетъ на землю?

46. Выстрѣломъ изъ ружья была пущена вертикально вверхъ пуля съ начальной скоростью 350 м. Какой высоты оно достигнетъ и черезъ сколько секундъ упадетъ обратно на землю?

47. Съ какой скоростью должно быть брошено вертикально вверхъ ядро, чтобы оно могло подняться на высоту 9 километровъ. Черезъ сколько секундъ оно упадетъ обратно на землю?

48. Тѣло брошено вертикально вверхъ съ начальной скоростью $v_0=120$ ф. Опредѣлить на какой высотѣ и черезъ сколько секундъ послѣ начала движенія скорость его будетъ $v=40$ ф.

49. Тѣло брошено вертикально вверхъ съ начальной скоростью $v_0=64$ ф. Опредѣлить на какой высотѣ подъема скорость его будетъ вдвое менѣе начальной.

50. Тѣло брошено вертикально вверхъ съ начальной скоростью $v_0=96$ ф. Спустя сколько секундъ оно, падая уже внизъ, будетъ имѣть скорость вдвое меньшую начальной.

51. Камень, брошенный вертикально вверхъ, упалъ обратно на землю черезъ 6 секундъ. Какая была его начальная скорость и до какой высоты онъ поднялся?

52. Тѣло брошено вертикально вверхъ съ начальной скоростью $v_0=1000$ ф. Опредѣлить его среднюю скорость за первыя 15 секундъ его движенія. ($g=32,2$ ф.).

53. Ядро вылетаетъ изъ дула пушки со скоростью $v=660$ м. Длина пушки $l=3$ м. Найти ускореніе, сообщаемое ядру выстрѣломъ.

54. Камень упалъ въ колодецъ. Черезъ 4 секунды былъ услышанъ плескъ воды. Опредѣлить глубину колодца: a) считая, что звукъ распространяется моментально; b) принимая во вниманіе, что скорость звука=1100 фут. въ секунду.

55. Свободно падающій камень въ концѣ первой секунды паденія встрѣчаетъ стеклянную пластинку и разбиваетъ ее, вслѣдствіе чего теряетъ половину своей скорости. Найти пространство, проходимое камнемъ въ слѣдующую секунду.

56. Паровозъ, имѣвшій въ извѣстный моментъ скорость 15 м., заторможенъ такимъ образомъ, что теряетъ въ каждую секунду 2 м. скорости. Опредѣлить: 1) скорость паровоза черезъ 5 секундъ послѣ начала торможенія и пройденное въ это время имъ пространство; 2) черезъ сколько секундъ онъ остановится; 3) каково должно быть замедленіе хода паровоза, чтобы онъ остановился черезъ $^1/_2$ минуты.

57. Тѣло поднимается по наклонной плоскости съ начальной скоростью въ 40 фут., при чемъ въ каждую секунду скорость его

уменьшается на 8 фут. Найти: 1) сколько секундъ будетъ подниматься вверхъ это тѣло; 2) какой путь оно при этомъ пройдетъ.

58. Два шара одновременно начинаютъ двигаться: первый свободно падаетъ на землю съ высоты 19,6 м., а второй поднимается вертикально вверхъ со скоростью, соотвѣтствующей этой высотѣ. Черезъ сколько секундъ оба шара будутъ на одной высотѣ надъ землей.

59. Баба парового молота имѣетъ высоту подъема=1,25 м. Время, необходимое для ея поднятія, равно двойному времени ея свободнаго паденія. Сколько ударовъ баба можетъ сдѣлать въ минуту?

60. Два тѣла падаютъ съ одной и той же высоты черезъ $t=3$ сек. одно послѣ другого. Черезъ сколько секундъ послѣ начала паденія второго тѣла ихъ взаимное разстояніе будетъ равно $s=192$ фута.

61. На одной вертикали взяты на равныхъ разстояніяхъ одна отъ другой точки A, B, C и D. Доказать, что если тѣло начинаетъ падать изъ точки A, то времена, употребленныя на прохожденіе равныхъ частей AB, BC и CD, относятся между собой какъ $1:(\sqrt{2}-1):(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

62. Тѣло брошено вертикально вверхъ со скоростью $v_0=15$ ф. Поднявшись на высоту $h_1=2$ футовъ, оно встрѣтило упругую поверхность, которая отбросила его назадъ съ такой же скоростью, съ какой ударилось въ нее тѣло. Опредѣлить: 1) съ какой скоростью тѣло упало на эту поверхность; 2) найти отношеніе всего времени подъема и паденія тѣла въ данномъ случаѣ къ такому же времени, но предполагая, что встрѣча съ поверхностью не происходитъ.

63. Изобразить графически пространство, пройденное тѣломъ въ 5 секундъ въ равноускоренномъ движеніи, зная, что скорость его возросла за это время отъ 30 до 75 сантиметр.

64. Паровозъ, выйдя со станціи, двигался равноускоренно въ теченіи 10 минутъ съ ускореніемъ въ 20 м. въ минуту, затѣмъ двигался равномѣрно съ пріобрѣтенной скоростью въ теченіи 5 минутъ и наконецъ въ теченіи слѣдующихъ 6 минутъ шелъ равномѣрно-замедленно до полной остановки. Изобразить графически и вычислить все пространство пройденное паровозомъ.

3. Сложныя движенія.

65. Скорость парохода $v_1 = 20$ ф. Опредѣлить составную скорость шара, катящагося по палубѣ со скоростью $v_2 = 15$ ф.: a) отъ кормы къ носу; b) отъ носа къ кормѣ; c) по кратчайшему разстоянію отъ одного борта до другого.

66. Два парохода отправляются одновременно изъ одного и того же мѣста. Одинъ пароходъ идетъ съ запада на востокъ со скоростью 12 верстъ въ часъ, а другой съ юга на сѣверъ со скоростью 16 верстъ въ часъ. На сколько верстъ будутъ расходиться въ каждый часъ другъ отъ друга оба парохода.

67. Два пѣшехода находятся другъ отъ друга въ разстояніи $d = 15$ м. Скорость перваго $= v_1$ метр., а второго $= v_2$ метр., при чемъ $v_1 > v_2$. Черезъ сколько секундъ путешественники поравняются, если они идутъ: a) другъ другу на встрѣчу; b) по одному направленію.

68. Два тѣла, одновременно выйдя изъ одной точки A, движутся по сторонамъ угла BAC со скоростями $v_1 = 9$ м. и $v_2 = 40$ м. Черезъ сколько секундъ ихъ взаимное разстояніе будетъ $d = 615$ м., если уголъ BAC равенъ: a) 90^0; b) 60^0.

69. Курьерскій поѣздъ въ 75 метр. длиною, двигаясь со скоростью 95 километровъ въ часъ, встрѣчаетъ пассажирскій поѣздъ длиною въ 125 метр., движущійся со скоростью 55 километровъ въ часъ. Опредѣлить: a) сколько времени будетъ проходить пассажирскій поѣздъ мимо наблюдателя, сидящаго въ курьерскомъ поѣздѣ; b) во сколько времени весь курьерскій поѣздъ пройдетъ мимо всего пассажирскаго.

70. Тѣло, падающее съ высоты 169 фут., во время паденія равномѣрно переносится вѣтромъ со скоростью 8 фут. въ горизонтальномъ направленіи. На какомъ разстояніи отъ вертикали, опущенной изъ начальной точки паденія упадетъ это тѣло на землю?

71. Точка обладаетъ двумя скоростями v_1 и v_2, уголъ между которыми $= 60^0$. Найти величину и направленіе составной скорости, если

$$v_1 = 40 \text{ м}; \quad 50 \text{ м}; \quad 100 \text{ м}.$$
$$v_2 = 60 \text{ м}; \quad 70 \text{ м}; \quad 100 \text{ м}.$$

72. Точка обладаетъ двумя равными скоростями $v = 30$ м., уголъ между которыми $= \alpha$. Найти величину и направленіе составной скорости, если

$$\alpha = 90^0;\quad 30^0;\quad 45^0;\quad 60^0;\quad 120^0;\quad 150^0.$$

73. Точка обладаетъ тремя скоростями: $v_1 = 20$ м.; $v_2 = 15$ м.; $v_3 = 30$ м., лежащими въ одной плоскости и образующими съ горизонтальной плоскостью соотвѣтственно углы въ 30^0, 45^0 и 60^0. Найти величину и направленіе составной скорости.

74. Точка обладаетъ тремя взаимно перпендикулярными скоростями: $v_1 = 96$ м., $v_2 = 28$ м. и $v_3 = 75$ м. Опредѣлить величину и направленіе составной скорости.

75. Точка обладаетъ тремя скоростями $v_1 = 3$ м., $v_2 = 4$ м. и $v_3 = 6$ м. Углы, образуемые тремя взаимно перпендикулярными осями OX, OY и OZ съ направленіемъ первой скорости, соотвѣтственно равны: $\alpha_1 = 90^0$; $\beta_1 = \gamma_1 = 45^0$; съ направленіемъ второй скорости: $\alpha_2 = 30^0$; $\beta_2 = 90^0$; $\gamma_2 = 60^0$; съ направленіемъ третьей скорости: $\alpha_3 = 72^0$; $\beta_3 = 18^0$; $\gamma_3 = 90^0$. Опредѣлить величину и направленіе составной скорости. *).

76. Разложить скорость точки $v = 40$ м. на двѣ скорости, изъ которыхъ одна $= 30$ м. и образуетъ съ другой уголъ α, если

$$\alpha = 30^0;\quad 45^0;\quad 60^0;\quad 90^0;\quad 120^0;\quad 150^0.$$

77. Два поѣзда ѣдутъ со скоростями $v_1 = 30$ верстъ и $v_2 = 50$ верстъ въ часъ по направленіямъ, уголъ между которыми α. Найти ихъ относительную скорость, если

$$\alpha = 30^0;\quad 45^0;\quad 60^0;\quad 120^0;\quad 150^0.$$

4. Вращательное круговое движеніе.

78. Найти скорость точки на окружности маховика, дѣлающаго $n = 30$ оборотовъ въ минуту, если діаметръ маховика $d = 5$ м. Опредѣлить также угловую скорость маховика.

---

*) Можно было бы ограничиться данными только для *двухъ* угловъ (напр. α и β), образуемыхъ направленіемъ каждой скорости съ двумя взаимно перпендикулярными осями, такъ какъ уголъ ея съ 3-ьей осью (γ) можетъ быть опредѣленъ изъ уравненія: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

79. Найти скорость вращенія земли у экватора, если радіусъ $R = 6000$ верстъ.

80. Рѣшить предыдущую задачу въ метрическихъ мѣрахъ.

81. Во сколько разъ конецъ минутной стрѣлки движется быстрѣе конца часовой, если длина первой вдвое болѣе длины второй.

82. Скорость на окружности жернова, дѣлающаго 100 оборотовъ въ минуту, равна 7,6 м. Опредѣлить діаметръ жернова и угловую скорость.

83. Лошадь вращаетъ вертикальный валъ при помощи водила. Опредѣлить число оборотовъ вала въ минуту, если скорость лошади $= 0,9$ м., а длина водила $= 4,8$ м.

84. Если наивыгоднѣйшая скорость рѣзанія $= 75$ миллиметр., то сколько оборотовъ долженъ дѣлать шпиндель токарнаго станка при обточкѣ шкива діаметромъ въ 1 метръ, чтобы снять первую стружку?

85. Во сколько времени можно обточить валъ, діаметръ котораго $= 0,08$ м., а длина $= 4,5$ м., если скорость рѣзанья $= 100$ миллиметр., а ширина стружки 0,5 миллиметр.?

86. На горизонтальномъ валу, вращающемся при помощи рукоятки, намотана веревка съ грузомъ. Радіусъ окружности, описываемой рукояткой $= 40$ см., а число оборотовъ въ минуту $= 36$.

Опредѣлить скорость на окружности рукоятки, а также скорость подъема груза, если діаметръ вала $= 12$ см.

87. Съ кривошипомъ, длина котораго равна r, равномѣрно вращающимся вмѣстѣ съ валомъ машины, соединенъ шарнирно шатунъ, другой конецъ котораго движется въ горизонтальныхъ направляющихъ. Опредѣлить: 1) будетъ ли равномѣрно двигаться шатунъ; 2) какой путь и съ какой средней скоростью пройдетъ конецъ шатуна при одномъ оборотѣ вала, если скорость конца кривошипа $v = 4,71$ м.

88. Валъ паровой машины дѣлаетъ $n = 80$ оборотовъ въ минуту. Длина хода поршня $l = 0,75$ м. Найти среднюю скорость поршня.

89. Ходъ поршня паровой машины $l = 0,5$ м.; средняя скорость его $V = 0,9$ м. Найти число оборотовъ вала въ минуту.

90. Діаметры двухъ шкивовъ d_1 и d_2. Если первый шкивъ дѣлаетъ въ минуту n_1 оборотовъ, то сколько оборотовъ въ это же время дѣлаетъ другой шкивъ. Скорости на окружностяхъ обоихъ шкивовъ одинаковы. $d_1 = 84$ см.; $d_2 = 36$ см.; $n_1 = 18$.

91. Числа оборотовъ двухъ сцѣпленныхъ зубчатыхъ колесъ соотвѣтственно равны 100 и 150. Діаметръ перваго колеса=75 см. Найти діаметръ второго.

92. Тѣло, находившееся надъ поверхностью земли на высотѣ 4 фут., брошено горизонтально и упало на землю на разстояніи 400 фут. Съ какой скоростью оно было брошено?

93. Тѣло, находившееся надъ землей на разстояніи 25 фут., брошено горизонтально со скоростью 44 фута. Найти на какомъ разстояніи тѣло упадетъ на землю и съ какой скоростью.

5. Основные законы механики. Зависимость между массой, силой и ускореніемъ.

94. Аэростатъ поднимается вертикально вверхъ съ нѣкоторой скоростью. Съ корзины его спущенъ канатъ, на которомъ виситъ якорь. Если перерѣзать канатъ, то какъ будетъ двигаться якорь, а также аэростатъ?

95. Поѣздъ идетъ со скоростью 36 километр. въ часъ. Съ самаго конца поѣзда свободно падаетъ грузъ съ высоты 4,9 метра. Гдѣ упадетъ этотъ грузъ?

96. Человѣкъ, держа въ рукахъ гирю въ 10 фунтовъ, падаетъ внизъ съ нѣкоторой высоты. Опредѣлить давленіе гири на его руку во время паденія.

97. Нѣкоторое тѣло начинаетъ двигаться подъ вліяніемъ постоянной силы и въ первую секунду проходитъ 8 футовъ. Найти отношеніе этой постоянной силы къ вѣсу тѣла.

98. Подъ дѣйствіемъ постоянной силы нѣкоторое тѣло проходитъ въ 3 послѣдовательныя секунды соотвѣтственныя пространства въ 12, 18 и 24 фута. Опредѣлить отношеніе постоянной силы къ вѣсу тѣла.

99. Поѣздъ идетъ равноускоренно. Въ часъ пополудни скорость его была 12 килом. въ часъ, а черезъ 10 минутъ она возрасла до 36 килом. въ часъ. Опредѣлить скорость поѣзда въ $7^1/_2$ минутъ второго часа, а также отношеніе силы тяги къ вѣсу поѣзда.

100. На тѣло, двигавшееся равномѣрно со скоростью 40 фут. въ 1″, начала дѣйствовать постоянная сила по направленію противоположному движенію тѣла. Отъ дѣйствія этой силы тѣло, пройдя 20 ф., остановилось. Найти отношеніе силы къ вѣсу тѣла.

101. Тѣло, вѣсомъ въ 50 килогр., приводится въ движеніе дѣйствіемъ постоянной силы. Черезъ 5 секундъ послѣ начала движенія дѣйствіе силы прекращается и тѣло проходитъ въ двѣ слѣдующія затѣмъ секунды 19,6 м. Опредѣлить величину постоянной силы.

102. Какое ускореніе сообщитъ шару въ 100 пудовъ постоянная сила въ 1 фунтъ? Какое пространство пройдетъ этотъ шаръ въ 1 минуту?

103. Опредѣлить массу куска желтой мѣди, объемъ котораго $=$ $=35$ куб. см. Удѣльный вѣсъ желтой мѣди $=8{,}4$.

104. Чугунный шаръ, діаметромъ въ 9 см., приводится въ движеніе постоянной силой въ 1 килогр. Опредѣлить ускореніе движенія и пространство, пройденное шаромъ въ 10 секундъ. Уд. вѣсъ чугуна $=7{,}2$.

105. Тѣло, вѣсомъ въ 100 килогр., движется подъ дѣйствіемъ постоянной силы въ 36 килогр. Въ теченіи нѣкотораго промежутка времени скорость тѣла увеличилась съ 3-хъ метр. до 21 метра. Найти величину этого промежутка времени.

106. Какую силу надо приложить къ тѣлу вѣсомъ въ 400 пуд., чтобы черезъ 8 сек. оно пріобрѣло скорость въ 14 фут. въ 1″.

107. Тѣло, вѣсомъ въ 60 пуд., прошло подъ дѣйствіемъ постоянной силы въ 10 секундъ 360 фут. Опредѣлить величину силы.

108. Тѣло, вѣсомъ въ 50 клгр., двигалось равномѣрно со скоростью 2 метра въ 1″. Къ нему приложили силу въ 1 клгр. Найти, какой путь пройдетъ это тѣло въ слѣдующія 10 секундъ, если направленіе силы: a) совпадало съ направленіемъ движенія; b) было противоположно ему.

109. Тѣло, вѣсомъ въ 2,5 пуда, пріобрѣтаетъ отъ постоянной силы равной 20 фунтамъ черезъ нѣкоторый промежутокъ времени скорость $=3$ фута. Найти силу, которая сообщитъ въ то же время скорость, равную 6 фут., тѣлу вѣсомъ въ 5 пудовъ.

110. Сила въ 1 клгр., дѣйствуя на тѣло, движущееся съ постоянной скоростью въ 50 м., задерживаетъ его движеніе и черезъ 5 секундъ останавливаетъ его. Направленіе силы прямо противоположно направленію движенія. Найти массу этого тѣла.

111. Найти отношеніе двухъ силъ F_1 и F_2, изъ которыхъ первая, дѣйствуя на тѣло вѣсомъ въ 5 фунтовъ, сообщаетъ ему ускореніе въ 12 футовъ, а вторая, дѣйствуя на тѣло вѣсомъ въ 28 фунтовъ, сообщаетъ ему ускореніе въ $7\frac{1}{2}$ футовъ.

Статика.

6. Сложеніе и разложеніе силъ.

I. Сходящіяся силы.

112—113. На одну и ту же точку тѣла дѣйствуютъ силы (въ килограммахъ)

по одному направленію:	по прямо-противоположному направленію:
112. 20; 30; 70; x	10; 45; 15; 30; $2x$
113. 10; 20; 30; $13x$	40; 50; 60; 70; $5x$

Найти силу x, если извѣстно, что подъ дѣйствіемъ всѣхъ приложенныхъ силъ тѣло остается въ равновѣсіи.

114—116. Силы P и Q дѣйствуютъ на одну и ту же точку подъ прямымъ угломъ. Найти ихъ равнодѣйствующую, если

114. $P=5$; $Q=12$. **115.** $P=28$; $Q=45$. **116.** $P=39$; $Q=80$.

117—118. Силы P и Q дѣйствуютъ на одну и ту же точку подъ прямымъ угломъ. Найти ихъ равнодѣйствующую R и углы (P, R) и (Q, R), если

117. $P=5$; $Q=5\sqrt{3}$. **118.** $P=Q=10$.

119—124. Двѣ равныя силы, по 10 пуд. каждая, дѣйствуютъ на точку подъ угломъ α. Найти ихъ равнодѣйствующую, если α равно

119. 30^0. **120.** 45^0. **121.** 60^0. **122.** 90^0. **123.** 120^0. **124.** 150^0.

125—128. Въ центрѣ правильнаго n-угольника приложено $n-1$ равныхъ силъ по P клгр., направленныхъ къ его вершинамъ. Найти равнодѣйствующую, если

125. $n=3$. **126.** $n=4$. **127.** $n=5$. **128.** $n=6$.

129—131. Разложить силу $R=100$ килогр. на 2 равныя силы, если каждая изъ нихъ составляетъ съ силой R уголъ α, равный

129. 30^0. **130.** 45^0. **131.** 60^0.

132—136. Двѣ силы въ 36 и 48 килогр. дѣйствуютъ на точку подъ угломъ α. Найти ихъ равнодѣйствующую, если α равно

132. 0^0. **133.** 90^0 **134.** 180^0. **135.** 60^0. **136.** 120^0.

137. Три равныя силы, лежащія въ одной плоскости, дѣйствуютъ на одну точку. Одна изъ силъ составляетъ съ каждой изъ остальныхъ уголъ 120°. Найти равнодѣйствующую этихъ трехъ силъ.

138. Показать, что равнодѣйствующая силъ въ 7 и 14 клгр., дѣйствующихъ одна къ другой подъ угломъ въ 120°, равна равнодѣйствующей двухъ равныхъ силъ по 7 клгр., дѣйствующихъ подъ угломъ въ 60°.

139. На точку дѣйствуютъ три силы въ 5, 7 и 13 клгр. Можетъ ли точка остаться въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ этихъ силъ, какъ бы онѣ ни были приложены?

140. Разложить данную вертикальную силу въ 10 клгр. на двѣ слагающія, изъ которыхъ одна была бы горизонтальна, а другая наклонена къ вертикали подъ угломъ въ 45°. Опредѣлить графически и аналитически эти силы.

141. Разложить силу въ 15 клгр. на двѣ взаимно-перпендикулярныя силы, величины которыхъ относились бы какъ 3 : 4.

142. Разложить силу въ 100 клгр. на двѣ силы, изъ которыхъ одна бы вдвое болѣе данной силы, а другая составляла бы съ данной силой прямой уголъ.

143. Вообразимъ параллелограммъ, прилежащія стороны котораго AB и AC, а діагональ AD. Раздѣлимъ сторону AB пополамъ въ точкѣ E. Показать, что равнодѣйствующая двухъ силъ, представляемыхъ отрѣзками AB и AC, вдвое болѣе равнодѣйствующей двухъ силъ, представляемыхъ отрѣзками AE и AC.

144. Сила въ 6 клгр., направленная внизъ подъ угломъ въ 45° къ горизонту, приложена къ тѣлу, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости. Опредѣлить графически и аналитически горизонтальную силу, достаточную, чтобы удержать тѣло въ покоѣ.

145. Къ вершинѣ A квадрата $ABCD$ приложены силы, представляемыя прямыми AB, AC и AD. Найти ихъ равнодѣйствующую.

146. Къ сторонамъ квадрата $ABCD$ приложены силы, дѣйствующія: первая въ 10 клгр. по направленію отъ D къ A; вторая въ 10 клгр. по направленію отъ B къ C и третья въ 20 клгр. по направленію отъ A къ B. Найти равнодѣйствующую этихъ 3-хъ силъ.

147. Три равныя веревки связаны въ узелъ; двѣ изъ нихъ привязаны къ гвоздямъ, вбитымъ на одинаковой высотѣ, а къ

третьей подвѣшенъ грузъ $P=10$ клгр. Опредѣлить графически и аналитически силы, стремящіяся вырвать гвозди, если уголъ между двумя первыми веревками $=60^0$.

148. Грузъ въ 24 клгр. подвѣшенъ на двухъ тягахъ, изъ которыхъ одна горизонтальная, а другая наклонена къ горизонтали подъ угломъ въ 135^0. Опредѣлить аналитически и графически натяженіе каждой тяги.

149. Когда барку тянутъ по рѣкѣ канатомъ (бичевой) посредствомъ силы людей или лошадей, то обыкновенно канатъ имѣетъ значительную длину. Почему не употребляютъ въ этомъ случаѣ короткаго каната? Какой канатъ слѣдуетъ употреблять, если барка движется силой буксирнаго парохода?

150. Найти равнодѣйствующую трехъ взаимно перпендикулярныхъ силъ, равныхъ 3 п., 4 п. и 12 п.

151. Окружность раздѣлена на нѣсколько равныхъ частей; къ центру ея приложены равныя силы, направленныя по радіусамъ, идущимъ къ точкамъ дѣленія. Найти ихъ равнодѣйствующую.

152. Въ окружности проведенъ діаметръ AB и двѣ равныя хорды CD и EF, перпендикулярныя къ діаметру. Опредѣлить равнодѣйствующую силъ AC, AE, AF и AD.

153. Къ вершинѣ A правильнаго 6-ка $ABCDEF$ приложены 5 силъ: AB, AC, AD, AE, AF. Найти равнодѣйствующую этихъ силъ.

154. Основаніе BC треугольника ABC раздѣлено въ точкахъ D и E на 3 части. Опредѣлить равнодѣйствующую силъ AB, AD, AE и AC, зная, что медіана основанія $=m$.

155. Къ точкѣ O пересѣченія трехъ медіанъ $\triangle$-ка ABC приложены три силы OA, OB и OC. Найти ихъ равнодѣйствующую.

156. Соединимъ точку O, взятую въ плоскости $\triangle$-ка ABC съ вершинами его A, B и C, а также съ серединами M, N, P его сторонъ. Показать графически, что равнодѣйствующая силъ OA, OB и OC равна равнодѣйствующей силъ OM, ON и OP.

II. Параллельныя силы.

157. Къ бруску, лежащему на двухъ опорахъ, подвѣшенъ грузъ въ 18 клгр. на разстояніи 40 см. отъ одной изъ опоръ. Найти давленіе отъ груза на каждую изъ опоръ, если разстояніе между опорами $=120$ см.

158. Къ бруску, лежащему на двухъ опорахъ, подвѣшенъ грузъ $P = 12$ клгр. на разстоянiи $d = 0,4$ м. отъ середины его. Опредѣлить давленiе на опоры, принявъ во вниманiе вѣсъ самого бруска, зная, что длина его $L = 4$ м., а вѣсъ на одинъ погонный метръ $p = 3$ клгр.

159. Къ бруску, лежащему на двухъ опорахъ A и B подвѣшены два груза, одинъ въ 40 клгр. въ точкѣ C, а другой въ 56 клгр. въ точкѣ D. Дано, что $AC : BC = 3 : 2$ и $AD : BD = 5 : 2$. Опредѣлить давленiе на каждую опору.

160. На прямую AB дѣйствуютъ двѣ параллельныя силы P и Q въ одну сторону. Опредѣлить длину AB, если извѣстно, что точка приложенiя равнодѣйствующей находится на разстоянiи a отъ силы P. $a = 12$ см.; $P = 7$ клгр.; $Q = 3$ клгр.

161. Три параллельныя силы въ 4, 6 и 10 клгр. дѣйствуютъ на тѣло въ одну сторону въ точкахъ A, B и C, лежащихъ на одной прямой. Найти ихъ равнодѣйствующую и ея точку приложенiя, если $AB = 20$ см., а $BC = 10$ см.

162. На вершины квадрата $ABCD$ дѣйствуютъ 4 параллельныя силы: двѣ силы по 1 клгр. приложены къ вершинамъ A и C и двѣ силы по 2 клгр. приложены къ вершинамъ B и D. Найти равнодѣйствующую всѣхъ силъ и ея точку приложенiя.

163. Къ концамъ бруска подвѣшены грузы въ 10 и 20 клгр. Вѣсъ бруска $= 10$ клгр. Гдѣ надо помѣстить точку опоры, чтобы произошло равновѣсiе?

164. Къ тремъ точкамъ A, B и C, лежащимъ на одной прямой, приложены силы въ 1, 4 и 7 клгр. Извѣстно, что $AB = BC = l$ и что сила въ 7 клгр. направлена въ сторону противоположную двумъ другимъ силамъ. Найти величину, направленiе и точку O приложенiя равнодѣйствующей.

165. Стержень AB, вѣсомъ въ 10 клгр., находится въ равновѣсiи, когда точка опоры удалена отъ A на 8 децим. Опредѣлить, гдѣ должна находиться точка опоры, если къ A будетъ подвѣшенъ грузъ въ 6 клгр.

166. Къ концу цилиндрическаго стержня длиною въ 0,6 м. подвѣшенъ грузъ въ 10 клгр. Стержень свободно качается около точки, разстоянiе которой отъ нагруженнаго конца $= 5$ см. Найти вѣсъ стержня.

167. Къ двумъ вершинамъ треугольника привѣшены два равные груза по P клгр., а къ третьей вершинѣ грузъ въ $2P$ клгр.

Опредѣлить величину и точку приложенія равнодѣйствующей этихъ трехъ грузовъ.

168. Къ вершинамъ квадрата подвѣшены 4 груза, величины которыхъ относятся какъ 2 : 3 : 4 : 5. Опредѣлить равнодѣйствующую и ея точку приложенія.

169. По сторонамъ квадрата $ABCD$ дѣйствуютъ 4 силы: отъ A къ B сила въ 3 фунта, отъ B къ C сила въ 4 ф., отъ D къ C сила въ 6 ф. и отъ A къ D сила въ 5 ф. Найти величину и направленіе равнодѣйствующей этихъ силъ.

170. По двумъ противоположнымъ сторонамъ параллелограмма и по діагонали его дѣйствуютъ силы, равныя длинамъ этихъ линій. Найти точку приложенія и величину равнодѣйствующей.

7. Пары силъ. Моменты силъ.

171. Въ одной плоскости дѣйствуютъ 5 паръ силъ. Направленіе вращенія трехъ паръ (2, 2); (5, 5); (15, 15) клгр. съ соотвѣтственными плечами 7,5; 4; 2 см. совпадаетъ съ направленіемъ движенія часовой стрѣлки, а направленіе двухъ остальныхъ паръ (35, 35) и (12, 12) съ плечами 2 и 5 противоположно направленію первыхъ трехъ. Найти моментъ равнодѣйствующей пары по величинѣ и направленію, а также величины ея силъ, если плечо ея = 5 см.

172. Силы двухъ паръ (P, P) и (Q, Q), направлены по сторонамъ параллелограмма $ABCD$ и равны имъ. Найти моментъ равнодѣйствующей пары, если обѣ пары дѣйствуютъ: a) въ одну сторону; b) въ разныя стороны. Уголъ $(P, Q) = \alpha$.

173—175. Найти моментъ пары равнодѣйствующей двухъ паръ, лежащихъ во взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ, если у слагающихъ паръ

	плечи (въ см.)	силы (въ клгр.)
173.	2 и 3	4 и 5
174.	4 и 3	5 и 7
175.	7 и 5	4 и 9.

176. Пару (25, 25) клгр. съ плечомъ 5 см. разложить на двѣ равныя пары, лежащія въ плоскостяхъ, образующихъ съ плоскостью равнодѣйствующей пары углы:

30°; 45°; 60°.

177. На вершины $\triangle$-ка ABC дѣйствуютъ параллельныя силы пропорціональныя длинамъ противоположныхъ сторонъ. Опредѣлить разстояніе центра этихъ силъ отъ стороны $BC = a$, если извѣстны стороны a, b и c и уголъ C.

8. Центры тяжести.

178. Отъ треугольника отрѣзана четвертая часть (n-ая часть) прямою, параллельной одной изъ его сторонъ. Найти центръ тяжести оставшейся части.

179. Два равнобедренныхъ треугольника, высоты которыхъ h_1 и h_2, имѣютъ общее основаніе. Найти разстояніе отъ основанія центра тяжести площади, заключенной между сторонами треугольниковъ, если они расположены: a) по одну сторону основанія; b) по обѣ стороны.

180. Показать, что прямая, соединяющая центры тяжести двухъ $\triangle$-ковъ, имѣющихъ общее основаніе, параллельна прямой, соединяющей ихъ вершины.

181. Отъ квадрата отрѣзанъ треугольникъ прямою, соединяющей середины смежныхъ сторонъ. Найти центръ тяжести оставшейся части.

182. Найти центръ тяжести однороднаго круглаго диска радіуса R, изъ котораго вырѣзанъ другой дискъ, описанный на радіусѣ перваго, какъ на діаметрѣ.

183. Найти центръ тяжести правильнаго 6-ка, изъ котораго вырѣзанъ ромбъ прямыми, проведенными изъ центра къ двумъ несмежнымъ вершинамъ. Сторона 6-ка $= a$.

184. Найти центръ тяжести квадрата, изъ котораго вырѣзанъ треугольникъ прямыми, проведенными изъ его центра къ двумъ смежнымъ вершинамъ. Сторона квадрата $= a$.

185. Найти центръ тяжести половины периметра правильнаго 6-ка, сторона котораго $= a$.

186. На сторонахъ прямоугольнаго равнобедреннаго $\triangle$-ка, гипотенуза котораго $= a$, построены квадраты. Найти центръ тяжести полученной фигуры.

187. Найти центръ тяжести прямоугольной трапеціи, основанія которой a и b, а высота h, при чемъ $a > b$.

188. Найти центръ тяжести тавроваго сѣченія, полная высота

котораго $h = 1\frac{1}{2}a$; длина верхней полочки $= a$, а ширина каждой полочки $= \frac{a}{4}$.

189. Опредѣлить центръ тяжести 4-ка $ABCD$, если $AB = AD$, а $BC = CD$.

190. Однородный стержень согнутъ подъ прямымъ угломъ такъ, что одна часть его (l) вдвое длиннѣе другой. Опредѣлить центръ тяжести этого стержня.

191. Къ вершинамъ и серединамъ сторонъ треугольной тяжелой доски прикрѣплены равные грузы. Опредѣлить центръ тяжести всей системы.

192. Къ вершинѣ A однородной доски, имѣющей форму равносторонняго треугольника ABC, прикрѣпленъ грузъ, равный вѣсу доски, притомъ такъ, что центръ тяжести его совпадаетъ съ вершиной. Показать графически положенie равновѣсiя доски, если ее подвѣсить къ веревкѣ, укрѣпленной въ серединѣ стороны AB.

193. Найти центръ тяжести половины кругового кольца, радiусы котораго r и r_1.

194. Два мѣдныхъ цилиндра спаяны такъ, что оси ихъ образуютъ одну прямую. Высоты цилиндровъ $= 9$ и 6 дюйм., а дiаметры основанiя соотвѣтственно $= 3$ и 2 дюйма. Опредѣлить центръ тяжести всей системы.

195. Цилиндрическiй сосудъ, глубина котораго $= 6$ дюйм., а вѣсъ $= 4$ фунта, вмѣщаетъ 2 фунта воды. Когда сосудъ пустой, то центръ тяжести его отстоитъ отъ верха на 3,39 дюйма. Опредѣлить разстоянiе центра тяжести сосуда, когда онъ наполненъ водой.

196. Найти центръ тяжести полаго полушара, внутреннiй радiусъ котораго $= R$, а толщина стѣнокъ $= e$.

197. Найти центръ тяжести пирамиды, отъ которой отсѣчена плоскостью параллельной основанiю другая пирамида, если высота первой пирамиды $= H$, а второй $= h$.

9. Равновѣсiе силъ.

198. Къ свободному невѣсомому тѣлу въ произвольно взятыхъ точкахъ его A, B и C приложены три силы, по величинѣ и на-

правленію равныя (или пропорціональныя) тремъ медіанамъ треугольника ABC. Доказать, что подъ дѣйствіемъ этихъ силъ тѣло останется въ равновѣсіи.

199. Доказать, что если къ этому тѣлу (см. задачу 198) приложены въ точкахъ A, B и C три силы, равныя (или пропорціональныя) тремъ высотамъ треугольника ABC, то тѣло останется въ равновѣсіи только въ томъ случаѣ, если треугольникъ ABC— равносторонній.

200. Доказать, что если къ этому тѣлу въ точкахъ A, B и C приложены три силы, по направленію совпадающія съ тремя высотами $\triangle$-ка ABC, а по величинѣ равныя (или пропорціональныя) тремъ соотвѣтственнымъ основаніямъ его, то такое тѣло останется въ равновѣсіи.

201. Къ концамъ горизонтальнаго круглаго стержня AB, длиною $l = 10$ фут., приложены двѣ силы по $F = 30$ фунтовъ; сила, приложенная къ точкѣ B, направлена по длинѣ стержня, а сила, приложенная въ точкѣ A, направлена вертикально внизъ. Вѣсъ стержня $P = 10$ фунтовъ. Опредѣлить графически и аналитически: 1) равнодѣйствующую силу по величинѣ и направленію, а также моментъ равнодѣйствующей пары, къ которымъ приводятся всѣ силы, дѣйствующія на стержень, если за центръ приведенія принять центръ тяжести стержня; 2) величину, направленіе и точку приложенія силы, уравновѣшивающей данную систему силъ.

202. На концахъ невѣсомаго однороднаго стержня, длина котораго $l = 60$ см., дѣйствуютъ двѣ равныя силы по $P = 12$ клгр. Силы эти лежатъ въ параллельныхъ плоскостяхъ и, будучи перенесены параллельно самимъ себѣ въ одну точку, образуютъ между собою прямой уголъ. Опредѣлить: 1) равнодѣйствующую силу и моментъ равнодѣйствующей пары, если за центръ приведенія принять середину стержня; 2) при какихъ условіяхъ возможно сохранить равновѣсіе стержня.

203. Кубъ стоитъ на горизонтальной плоскости. Черезъ одну изъ вершинъ его нижняго основанія O проведены три оси координатъ OX, OY и OZ, совпадающія съ ребрами куба. Положимъ, что къ двумъ вершинамъ куба, примыкающимъ къ верхнему ребру его, параллельному оси OX, приложено по одной силѣ P такъ, что направленіе одной силы параллельно оси OY, а направленіе другой параллельно оси OZ (т.-е. силы эти направлены по со-

отвѣтствующимъ ребрамъ куба). Опредѣлить по величинѣ и направленію равнодѣйствующую силу и моментъ равнодѣйствующей пары, если за центръ приведенія принять центръ тяжести куба.

204. Какой уравновѣшивающій грузъ надо подвѣсить къ концу A призматическаго рычага AB, свободно вращающагося около своего другого конца B, если вѣсъ рычага$=P$, и вертикально вверхъ на него дѣйствуетъ сила 2,5 P, приложенная отъ конца B на одной четверти длины рычага.

205. Балка лежитъ горизонтально на 2-хъ опорахъ. Къ ней приложены грузы $F_1=12$ пуд., $F_2=15$ п. и $F_3=16$ п. на соотвѣтствующихъ разстояніяхъ, считая отъ одного конца: $l_1=5$ ф., $l_2=10$ ф. и $l_3=15$ ф. Найти давленіе на каждую опору: 1) не принимая во вниманіе вѣса самой балки; 2) считая, что вѣсъ балки $P=4$ пуда.

206. Точка вращенія рычага ACB, согнутаго подъ прямымъ угломъ, находится въ C. Плечи AC и BC соотвѣтственно равны $a=10$ и $b=7$ см., при чемъ плечо AC вертикально. Горизонтальная сила $P=2{,}1$ клгр., приложенная къ точкѣ A, уравновѣшивается вертикальной силой, приложенной въ точкѣ B. Найти эту послѣднюю силу, а также давленіе, производимое на точку опоры.

207. Балка AB, длиною $l=10$ фут. и вѣсомъ $P=24$ фунта, наклонена къ горизонту, при чемъ концомъ A она упирается въ основаніе стѣны, а другой конецъ ея B удерживается горизонтально натянутой веревкой, укрѣпленной въ стѣнѣ на высотѣ $h=8$ фут. Опредѣлить натяженіе F веревки и давленіе R конца A.

208. Къ концу B балки AB, свободно вращающейся около своего другого конца A, шарнирно укрѣпленнаго въ стѣнѣ, подвѣшенъ грузъ Q, равный вѣсу самой балки. Балка удерживается въ равновѣсіи веревкой, перпендикулярной къ AB и привязанной къ ея серединѣ. Уголъ, составляемый балкой съ горизонтомъ $=30^0$. Найти натяженіе F веревки и давленіе N стѣны на конецъ A по величинѣ и направленію.

209. Брусокъ, длина котораго $=l$, а вѣсъ $=P$, опирается концомъ A на горизонтальную плоскость, а концомъ B на стѣну, наклоненную вправо отъ вертикали и образующую съ горизонтомъ уголъ въ 60^0. Найти, какую горизонтальную силу F надо

приложить къ точкѣ A, чтобы брусокъ остался въ равновѣсіи, а также сопротивленія R и R' въ опорныхъ точкахъ A и B. Уголъ наклона бруска къ горизонту $= 30^0$.

210. Невѣсомый брусокъ AB, длина котораго $l = 10$ фут., опирается концомъ A на вертикальную, а концомъ B на горизонтальную плоскость. На разстояніи a отъ конца B къ нему подвѣшенъ грузъ $P = 4$ фунт. Брусокъ расположенъ въ плоскости, перпендикулярной къ прямой пересѣченія опорныхъ плоскостей и составляетъ съ горизонтомъ уголъ α. Опредѣлить горизонтальную силу S, которую необходимо приложить, чтобы удержать брусокъ въ равновѣсіи, а также сопротивленія R и R' опоръ въ точкахъ A и B.

$\alpha = 30^0$; 45^0; 60^0
$a = 3$ ф. 5 ф. 8 ф.

211. Брусокъ AB, длина котораго $= l$, а вѣсъ $= P$, опирается, какъ въ предыдущей задачѣ, концами A и B на вертикальную и горизонтальную плоскости. Онъ удерживается отъ скольженія натяженіемъ веревки, привязанной однимъ концомъ къ бруску, а другимъ концомъ укрѣпленной въ ребрѣ опорныхъ плоскостей. Брусокъ и натянутая веревка расположены въ плоскости, перпендикулярной къ этому ребру, и составляютъ съ горизонтомъ углы α и β. Опредѣлить натяженіе F веревки, а также сопротивленія R и R' опоръ въ точкахъ A и B.

$\alpha = 45^0$; $\beta = 15^0$; $\alpha = 60^0$; $\beta = 30^0$.

212. Можетъ ли этотъ брусокъ удерживаться въ равновѣсіи натяженіемъ веревки, если она привязана къ его серединѣ?

213. Два неравные бруска AB и BC, вѣсомъ которыхъ можно пренебречь, соединены шарниромъ въ точкѣ B, а концами A и C задѣланы въ горизонтальную плоскость. Бруски расположены въ вертикальной плоскости и составляютъ съ горизонтомъ углы α и β. Къ вершинѣ B привѣшенъ грузъ $P = 10$ пуд. Опредѣлить горизонтальные распоры S и S_1 и вертикальныя давленія Q и Q_1, производимыя каждымъ брускомъ.

$\alpha = 30^0$; 45^0; 60^0; 90^0
$\beta = 60^0$; 45^0; 60^0; 30^0.

214. Опредѣлить моментъ устойчивости кирпичной стѣны трапецоидальнаго сѣченія (см. фиг. 100) при вращеніи ея около

ребра, проходящаго черезъ: a) точку D; b) точку A, если верхнее основанiе $= b$, нижнее основанiе $= a$, высота $= h$, длина стѣны $= l$. Удѣльный вѣсъ кирпича $= \delta$.

Примѣръ. $b = 0{,}6$ м.; $B = 1{,}2$ м.; $h = 1.5$ м.; $l = 2$ м.; $\delta = 2$.

215. Опредѣлить коэффицiентъ устойчивости погоннаго метра прямоугольной стѣны изъ кирпича, высота которой $= h$, а толщина $= b$, если на стѣну дѣйствуетъ давленiе вѣтра въ p тоннъ на квадр. метръ.

Примѣръ. $h = 2$ м.; $b = 0{,}5$ м.; $p = 0{,}2$; $\delta = 2$.

216. Опредѣлить, во сколько разъ увеличится коэффицiентъ устойчивости этой стѣны, если сзади къ ней по всей длинѣ пристроить стѣнку (контръ-форсъ), профильное сѣченiе которой представляетъ прямоугольный треугольникъ, съ высотой (прилегающей къ главной стѣнѣ) $= \frac{h}{2}$ и основанiемъ $= b$.

217. Опредѣлить коэффицiентъ устойчивости кирпичной дымовой трубы, представляющей усѣченный конусъ, высота котораго $= h$, радiусы нижняго и верхняго основанiй равны R и r, а дымоходъ представляетъ цилиндръ, радiуса $= \rho$. Трубу стремится опрокинуть давленiе вѣтра въ p тоннъ на кв. метръ площади, представляющей проекцiю наружной поверхности трубы на плоскость, перпендикулярную направленiю вѣтра. Вслѣдствiе скольженiя воздушнаго потока по поверхности трубы, давленiе вѣтра слѣдуетъ уменьшить, умноживъ его на эмпирическiй коэффицiентъ $= 0{,}57$.

Отвѣты и рѣшенія.

1. 162 километра. **2.** 1998 м. **3.** $v_1 : v_2 = 15 : 14$. **4.** 1,5 ф. **5.** 4,5 м. **6.** $\frac{v_1 v_2 t}{v_1 + v_2} = 54$ ф. **7.** 3 ч. 45 м. **8.** $\frac{v_1 t}{v_2 - v_1} = 4,5$ ч.; $\frac{v_1 v_2 t}{v_2 - v_1} = 315$ в. **9.** $\frac{v_1 (t_1 + t_2)}{t_2} = 3,75$ м.; 900 м. **10.** 0,04 ф. **11.** 40 м. **12.** 60 м. **13.** 64 ф. **14.** 0,1 м. **15.** 20 сек. **16.** 200 м. **17.** 150 ф.; 48 ф. **18.** $a = 20$ м.; $v = 200$ м. **19.** 40 сек. **20.** 195 м. **21.** $v = 8$ м.; $s = 120$ м. **22.** $a = \frac{5}{16}$ м.; $s = 750$ м.; $v = 25$ м. **23.** 120 м. **24.** $-9^1/_3$ см. **25.** 12,5 в. **26.** 100 см. **27.** $-\frac{1}{9}$ м. **28.** 30 ф. **29.** $s = 576$ ф.; $s' = 176$ ф. **30.** a) 49 м.; b) 53 м. **31.** 62,5 м. **32.** $t = 4^1/_4$ сек.; $v = 136$ ф. **33.** 400 ф.; 176 ф. **34.** 17,3 м. **35.** $t = 2^1/_2$ сек.; $v = 80$ ф. **36.** $h = 2g$; $t = 2$. **37.** $t = 14^2/_7$ сек.; $s = 135,1$ м. **38.** $3^6/_{25}$ фут. **39.** $9^1/_2$ сек. **40.** $s = 6960$ м.; $t = 34^2/_7$ сек. **44.** 1,5 g. **45.** 196 ф.; 7 сек. **46.** 6250 м.; $61^3/_7$ сек. **47.** 420 м.; $85^5/_7$ сек. **48.** 200 ф.; 2,5 сек. **49.** $h = \frac{3v^2}{8g} = 48$ ф. **50.** 4,5 сек. **51.** $v_0 = 96$ ф.; $h = 144$ ф. **52.** 758,5 ф. **53.** $a = \frac{v^2}{2l} = 72600$ м. **54.** a) 256 ф. b) Назовемъ глубину колодца черезъ x. Время наблюденія, т.-е. 4 секунды, состоитъ изъ времени паденія камня $= \sqrt{\frac{2x}{g}} = \frac{\sqrt{x}}{4}$ и времени распространенія звука $= \frac{x}{1100}$. Поэтому $\frac{\sqrt{x}}{4} + \frac{x}{1100} = 4$, откуда $x = 232$ ф. (приблиз.). **55.** 32 ф. **56.** $v = 5$ м.; $s = 50$ м.; $t = 7,5$ сек.; $a = -0,5$ м. **57.** 5 сек.; 100 ф. **58.** Черезъ 1 сек.

59. 39,2. **60**. $x = \frac{2s - gt^2}{2gt} = {}^1/_2$ сек. **62**. Если бы тѣло не встрѣтилось съ пластинкой, то оно поднялось бы на высоту $h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{225}{64}$ ф. и время его полнаго подъема и обратнаго паденія $t = \frac{2v_0}{g} = \frac{30}{32} = 0{,}94$ сек. Скорость тѣла въ моментъ удара его о пластинку опредѣлится по формулѣ

$$v_1 = \sqrt{2g(h - h_1)} = \sqrt{64\left(\frac{225}{64} - 2\right)} = 9{,}84 \text{ ф.}$$

Время, въ которое тѣло долетитъ до пластинки, опредѣлится изъ уравненія $v_1 = v_0 - gt_1$, откуда $t_1 = \frac{v_0 - v_1}{g} = \frac{15 - 9{,}84}{32} = 0{,}16$ сек. По условію задачи тѣло будетъ обратно падать съ тою же скоростью v_1, съ какой оно ударилось о пластинку, т.-е. время паденія будетъ равно 0,16 сек., а полное время подъема и паденія $t_1 = 0{,}16 \,.\, 2 = 0{,}32$. Искомое отношеніе $\frac{t_1}{t} = \frac{0{,}32}{0{,}94} = {}^1/_3$ (приблизительно).

65. a) 35 ф.; b) — 5 ф.; c) 25 ф. **66**. 20 в. **67**. $\frac{d}{v_1 + v_2}$; $\frac{d}{v_1 - v_2}$. **68**. 15 сек; 17 сек. (прибл.). **69**. a) 3 сек.; b) 4,8 сек. **70**. 28 ф. **71**. 1) 87,2 м.; 3) 173,2 м. **72**. $V = 2v \cos\frac{\alpha}{2}$; 1) 42,5; 5) 30. **73**. 63,3 м.; $\alpha = 47^0 16'$. **74**. $V = 125$ м.; $\angle(V, v_1) = 39^0 49{,}1'$; $\angle(V, v_2) = 77^0 3{,}5'$; $\angle(V, v_3) = 53^0 7{,}7'$. **75**. $V = 10{,}2$; $\angle(V, v_x) = 58^0 41'$; $\angle(V, v_y) = 40^0 7'$; $\angle(V, v_z) = 66^0 18'$.

77. $10\sqrt{34 - 30\cos\alpha}$. **78**. 7,85 м. **81**. 24. **82**. 1,45 м. **83**. 1,8 **87**. 4 м.; $\frac{2v}{\pi} = 3$ м. **88**. $\frac{2ln}{60} = 2$ м. **89**. $\frac{30v}{l} = 54$. **90**. $\frac{d_1 n_1}{d_2} = 42$. **91**. 50 см. **92**. 800 ф. **93**. $s = 55$ ф.; $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 59{,}5$ ф.

94. Якорь сперва будетъ подниматься равномѣрно-замедленно съ начальной скоростью v_0 аэростата въ моментъ перерѣзанія каната. Поднявшись на высоту $h = \frac{v_0^2}{2g}$, якорь будетъ падать.

95. Тоже у конца поѣзда. Почему? **96**. 0. Почему? **97**. ${}^1/_2$. **98**. ${}^3/_{16}$. **99**. 30 килом. въ часъ; ${}^3/_{40}$. **100**. $1{}^1/_4$. **101**. 10 клгр.

102. $a = 1/_{125}$ ф.; $s = 14{,}4$ ф. **105**. 5,1 сек. **106**. $21^7/_8$ пуд. **107**. 13,5 п. **109**. 2 п. **110**. 0,1. **111**. 2 : 7.

---

112. 25. **113**. 20. **114**. 13. **115**. 53. **116**. 89. **117**. 10; $\angle(P, R) = 60^0$. **118**. $10\sqrt{2}$; $\angle(P, R) = \angle(Q, R) = 45^0$. **121**. $10\sqrt{3} = 17{,}3$. **122**. $10\sqrt{2} = 14{,}1$.

123. 10. **127**. $4P \cos 36^0 \cos 72^0$. **128**. P. **139**. Нѣтъ. Почему? **140**. 10; $10\sqrt{2} = 14{,}1$. **141**. 12; 9 **142**. 200; 173. **144**. $3\sqrt{2}$. **145**. $2AC$. **146**. 20. **147**. 5,8. **148**. Горизонтальная тяга сжимается силой = 24 клгр., а наклонная растягивается силой = $= 24\sqrt{2} = 33{,}8$ клгр. **150**. 13. **152**. $2AB$. **153**. $3AD$. **154**. 4 *т*. **155**. 0. **157**. 12 и 6 клгр. **158**. $\frac{pL}{2} + P\left(\frac{1}{2} + \frac{d}{L}\right) = 13{,}2$ клгр.; $\frac{pL}{2} + P\left(\frac{1}{2} - \frac{d}{L}\right) = 10{,}8$ клгр. **159**. 32 и 64 клгр.

160. $\frac{a(P+Q)}{Q} = 40$ см. **161**. 20 клгр.; на 21 см. отъ точки A. **162**. 6 клгр. **163**. На $^3/_8$ длины бруска, считая отъ точки прикрѣпленія груза въ 20 клгр. **164**. $R = 2$ клгр.; $CO = 3l$. **165**. Въ 5 децим. отъ точки A. **166**. 2 клгр. **167**. Равнодѣйствующая $R = 4$ клгр. приложена въ серединѣ медіаны стороны, противоположной 3-ьей вершинѣ. **168**. Точка приложенія равнодѣйствующей всѣхъ силъ дѣлитъ пополамъ разстояніе между точками приложенія равнодѣйствующей 1-ой и 4-ой силъ и равнодѣйствующей 2-ой и 3-ой силъ. **170**. Равнодѣйствующая равна по величинѣ другой діагонали и приложена въ точкѣ пересѣченія діагоналей. **171**. $G = -65$ клгр.-сметр.; 13 клгр. **172**. $2PQ\sin\alpha$; 0. **173**. $G = 17$ клгр.-см. **174**. $G = 29$ клгр.-см. **175**. 53 клгр.-см. **176**. 1) 72,2 клгр.-см.; 2) 88,6 клгр.-см. 3) 125 клгр.-см. **177**. $\frac{ab \sin C}{a+b+c}$. **178**. На разстояніи отъ цѣлой стороны = $= \frac{h}{3}\left(1 - \frac{2}{n+\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{9}h$. **179**. $\frac{h_1+h_2}{3}$; $\frac{h_1-h_2}{3}$. **182**. На $^1/_6$ части радіуса. **183**. На разстояніи $= \frac{a}{4}$ отъ центра 6-ка.

185 $OG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **187**. Разстояніе центра тяжести отъ стороны,

перпендикулярной къ основаніямъ, равно $\frac{a^2+ab+b^2}{3(a+b)}$. **189**. На серединѣ діагонали AC. **190**. Координаты центра тяжести: $\frac{l}{3}$ и $\frac{l}{6}$. **191**. Совпадаетъ съ центромъ тяжести треугольника. **192**. Пусть D середина AG, гдѣ G центръ тяжести $\triangle$-ка ABC. Направленіе веревки пройдетъ черезъ D перпендикулярно къ сторонѣ AC. **193**. $OG=\frac{4(r^2+rr_1+r_1^2)}{3\pi(r+r_1)}$. **194**. Въ точкѣ встрѣчи осей. **195**. На 3,26 дюйма. **196**. $OG=\frac{3(4R^3+6R^2e+4Re^2+e^3)}{3R^2+3Re+e^2}$. **197**. Пусть x_1 разстояніе искомаго центра тяжести отъ нижняго, а x_2 — отъ верхняго основанія усѣченной пирамиды. Тогда $\frac{x_1}{x_2}=$ $=\frac{H^2+2Hh+3h^2}{h^2+2Hh+3H^2}$. Если высоты замѣнить основаніями B и b, то $\frac{x_1}{x_2}=\frac{B+2\sqrt{Bb}+3b}{b+2\sqrt{Bb}+3B}$. **198**. См. теорему моментовъ относительно трехъ точекъ. **201**. 1) $R=50$ ф. направлена подъ угломъ $53^0 8'$ къ стержню; $G=150$ фунто-фут.; 2) Сила въ 50 ф., параллельная R и приложенная въ точкѣ M стержня, при чемъ $AM=1^1/_4$ ф. **202**. $R=P\sqrt{2}=16{,}9$ клгр.; $G=\frac{Pl}{2}\sqrt{2}=507{,}6$ клгр.-см. **203**. Равнод. сила $R=P\sqrt{2}$ и ось равнод. пары $G=\frac{Pa}{2}\sqrt{6}$ образуютъ съ осями одинаковые углы въ 90^0, 45^0 и 45^0, откуда слѣдуетъ, что совокупность ихъ образуетъ *динаму* или *силовой винтъ*. **204**. $\frac{P}{8}$. **205**. 18,75 п.; 24,25 п. Въ подобныхъ задачахъ рекомендуется находить давленія на опоры по уравненіямъ моментовъ силъ относительно опоръ, считая кромѣ приложенныхъ силъ еще и противодѣйствія R и R' опоръ. Написавъ одно уравненіе моментовъ для опоры A, а другое для опоры B, легко найдемъ R и R'. **206**. 3 клгр. **207**. Натяженіе веревки $=9$ фунт. **208**. Такъ какъ всѣ данныя и искомыя силы лежатъ въ одной плоскости, то проведемъ въ этой плоскости изъ точки A, какъ изъ начала, двѣ взаимно-перпендикулярныя оси, горизонтальную и вертикальную, и напишемъ два уравненія суммы проекцій силъ

на каждую изъ нихъ, а также уравненіе моментовъ относительно точки A, при чемъ уголъ неизвѣстной силы N съ горизонтальною осью назовемъ черезъ α, а длину бруска черезъ l. Итакъ имѣемъ: $N\cos\alpha - F\cos 60^0 = 0$. . . (1); $F\cos 30^0 - N\sin\alpha - 2Q = 0$. . . (2); $Ql\cos 30^0 + {}^1/_2\, Ql\cos 30^0 - {}^1/_2\, Fl = 0$ . . . (3). Изъ ур-ія (3) получимъ, что $F = \frac{3\sqrt{3}\,Q}{2}$. Вставивъ это значеніе въ (1) и (2), найдемъ: $N\sin\alpha = \frac{Q}{4}$; $N\cos\alpha = \frac{3\sqrt{3}\,Q}{4}$. Возведя обѣ части въ квадратъ и сложивъ, будемъ имѣть, что $N^2 = \frac{7Q^2}{4}$ или $N = \frac{Q}{2}\sqrt{7}$. Подставивъ это значеніе въ ур-іе $N\sin\alpha = \frac{Q}{4}$, получимъ, что $\sin\alpha = \frac{1}{2\sqrt{7}}$, откуда $\alpha = 10^0 54'$. **209**. Проведя изъ точки A горизонтальную и вертикальную оси, напишемъ три ур-ія равновѣсія (R и R' перпендикулярны къ опорнымъ плоскостямъ): $F - R'\cos 30^0 = 0$; $R'\sin 30^0 + R - P = 0$; $\frac{Pl}{2}\cos 30^0 - R'l\sin 60^0 = 0$.

Рѣшивъ уравненія, найдемъ, что $F = \frac{P}{4}\sqrt{3}$; $R = \frac{3}{4}P$; $R' = \frac{P}{2}$.

210. $S = R = P\frac{a}{l}\operatorname{cotg}\alpha$; $R' = P$. **211**. Уравненія равновѣсія:

$R - F\cos\beta = 0$ . . . (1); $R' - P - F\sin\beta = 0$ . . . (2);

$\frac{1}{2}Pl\cos\alpha + Rl\sin\alpha - Rl\cos\alpha = 0$ . . . (3).

Изъ (1) находимъ $F = \frac{R}{\cos\beta}$. Подставимъ это значеніе въ (2): $R' = P + R\operatorname{tang}\beta$. Подставивъ значеніе R' въ (3), получимъ послѣ упрощеній, что $R = \frac{P\cos\alpha}{2(\sin\alpha - \cos\alpha\operatorname{tang}\beta)} = \frac{P\cos\alpha\cos\beta}{2\sin(\alpha-\beta)}$. Затѣмъ легко находимъ, что $F = \frac{P\cos\alpha}{2\sin(\alpha-\beta)}$ и $R' = P\left(1 + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha-\beta)}\right)$.

212. Нѣтъ. Почему? **213**. Задача разрѣшается разложеніемъ силъ по правилу параллелограмма. $S = S_1 = P\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$; $Q = P\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$; $Q_1 = P\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

214. Плечо $DJ = \frac{a^2 + ab + b^2}{3(a+b)}$ м.; вѣсъ стѣны $P = \frac{(a+b)hl\delta}{2}$;

$$P \,.\, DJ = \frac{hl\delta(a^2 + ab + b^2)}{6} = 2{,}52 \text{ тон.-метр.};$$

$$P \,.\, AJ = \frac{hl\delta(2a^2 + 2ab - b^2)}{6} = 3{,}96 \text{ тон.-метр.}$$

215. Коэффиціентъ устойчивости $= \frac{b^2\delta}{ph} = 1{,}25$.

216. Коэффиціентъ устойчивости $= \frac{10b^2\delta}{3ph}$; въ $3^1/_3$ раза.

217. Вѣсъ трубы $\frac{(R^2 + r^2 + Rr - 3\varrho^2)\pi h\delta R}{3}$; сила давленія вѣтра $P = 0{,}57\,ph\,(R + r)$. Разстояніе центра тяжести отъ нижняго основанія $x = \frac{(2r + R)\,h}{3(R + r)}$. Опрокидывающій моментъ $0{,}19\,h^2p\,(R + 2r)$. Коэффиціентъ устойчивости $=$

$$= \frac{(R^2 + r^2 + Rr - 3\varrho^2)\,\pi\delta R}{0{,}57\,hp\,(R + 2r)}.$$

Опечатки.

Страница.	Строка.	Напечатано:	Должно быть:
37	5 снизу	4,9(метр.)	$4{,}9t^2$(метр.)
81	9 „	0-й	0
82	2 „	сила n	сила u
85	5 сверху	настроеніемъ	построеніемъ
86	1 „	$AL = a_1,\ Q$ и	$AL = a_1$ и
97	3 „	$\frac{P+Q}{Q} + \frac{p+q}{p}$	$\frac{P+Q}{Q} = \frac{p+q}{q}$
101	12 „	F_1	F_3
102	1 „	силы пара	силы пары
112	9 „	$\angle LAG - \angle P_1AR$	$\angle LAG = \angle P_1AR$
„	11 „	$= \frac{RP_1r}{P}$	$= \frac{RP_1r}{P_1}$

ОГЛАВЛЕНІЕ.


30

